Module 2
Éléments d'algèbre

MQT 1001
Mathématiques appliquées
à la gestion

Houda Affes

UNIVERSITÉ
TÉLUQ

Table des matières

Section 1 : les expressions algébriques

On a retrouvé sur des tablettes babyloniennes, datant de l'époque des Séleucides (305 à 64 av. J.-C.), un problème de mathématiques : « Un roseau est placé verticalement contre un mur. S'il descend de 3 coudées, il s'écarte de 9 coudées. Qu'est le roseau? Qu'est le mur? »

Et sa solution : « Attendu que tu ne les connais pas, 3 fois 3 : 9 fois 9 : 81. Tu ajouteras 9 à 81 : 90. Tu multiplieras 90 par $\frac{1}{2}$: 45. L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$. Tu multiplieras $\frac{1}{3}$ par 45 : 15 : le roseau. Qu'est le mur? 15 fois 15 : 225. 9 fois 9 : 81. Tu soustrairas 81 de 225 : reste 144. Quoi par quoi dois-je multiplier, pour qu'il y ait 144? 12 fois 12 : 144. Le mur est 144.[1] »

Pas facile à suivre, n'est-ce pas?

L'un des principaux apports de l'algèbre au développement des mathématiques est sans contredit l'utilisation de symboles (souvent des lettres de l'alphabet) pour représenter des quantités et d'autres symboles pour représenter des opérations ou des relations entre ces quantités. Ces symboles aident grandement à comprendre et à solutionner différents problèmes. Ils aident aussi à simplifier des problèmes qui paraissent de prime abord fort complexes.

Dans le problème de mathématiques présenté plus haut, une partie de la solution consiste à trouver l'hypoténuse d'un triangle rectangle. On peut écrire qu'il est possible de trouver l'hypoténuse d'un triangle rectangle en cherchant la racine carrée de la somme des carrés des deux autres côtés. Mais il est beaucoup plus simple d'écrire, sous la forme d'une expression algébrique :

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Il est cependant important de bien connaître les règles d'utilisation de ces différents symboles de même que les façons d'effectuer les calculs, s'il y a lieu.

1. *Mathématiques et mathématiciens*, J. Dedron et J. Itard, Éditions Magnards (1959).

Des symboles pour représenter des quantités

Les constantes et les variables

Les symboles qui représentent des quantités sont appelés des constantes ou des variables. Si, dans le cadre de la situation étudiée ou dans le problème à résoudre, la quantité reste la même, le symbole prendra le nom de *constante*. Par contre, si la quantité change de valeur dans la situation étudiée ou si la quantité est inconnue, le symbole sera appelé une *variable*.

Les symboles sont habituellement des lettres de notre alphabet, minuscules ou majuscules. Si une même lettre est utilisée en majuscule et en minuscule, elle ne représente habituellement pas la même quantité. Traditionnellement, en mathématiques, les premières lettres de l'alphabet (a, b, c) représentent des constantes et les dernières (x, y, z), des variables. Toutefois, cela n'a aucun caractère obligatoire. De plus, la plupart des sciences (physique, chimie, informatique, économique, etc.) ont tendance à utiliser des lettres qui vont faciliter la compréhension des formules : $F = ma$ (la **f**orce est égale à la **m**asse multipliée par l'**a**ccélération).

On utilise parfois des lettres grecques comme π, θ, δ ou λ pour nommer des constantes ou des variables. C'est le cas de la formule pour trouver la circonférence d'un cercle : $C = 2\pi R$. Le symbole π (lire « pi ») représente ici une constante qui ne change jamais de valeur, peu importe la situation ou le problème. C'est un nombre approximativement égal à 3,14159. Les lettres grecques sont peu utilisées en administration, sauf dans les cours qui font appel aux statistiques.

Par souci de clarté, il arrive fréquemment que l'on utilise une abréviation contenant plusieurs lettres pour représenter une même quantité : $FV = PV(1+IN)$. Ici, ce sont les deux lettres PV qui constituent la variable représentant la valeur placée ou le principal. De même, FV est la variable représentant la valeur finale. Par contre, les lettres *I* et *N* sont deux variables différentes puisque chacune représente une quantité différente, I pour l'intérêt et N pour le nombre d'années du placement. On voit immédiatement qu'il est très important d'identifier les variables que l'on utilise et de leur associer les quantités qu'elles représentent.

Les indices, les exposants et les radicaux

Dans certaines situations, les variables sont très nombreuses. C'est le cas en recherche opérationnelle ou en statistiques par exemple. Comme le nombre de lettres est limité, on utilise les *variables indicées***.** C'est un peu comme si l'on numérotait les variables. Par exemple, on demande à un ordinateur de choisir 30 nombres au hasard. Pour représenter ces 30 nombres, on utilise la lettre x que l'on fait suivre d'un *indice*, c'est-à-dire d'un petit chiffre placé un peu plus bas que la lettre elle-même : $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{30}$. La variable x_1

représente le premier nombre choisi au hasard, x_2 le deuxième et ainsi de suite. Sous cette forme linéaire, une telle liste de variables indicées est appelée *vecteur*.

Les variables peuvent aussi représenter des objets mathématiques plus complexes qu'une simple quantité : ensembles, vecteurs, matrices, etc. C'est le cas des tableaux de nombres appelés *matrices* (un sujet que nous aborderons plus en détails à la section 4) dans lesquels certaines variables ont parfois deux indices : $a_{2,3}$. Le premier indice indique alors le numéro de la ligne et le deuxième, le numéro de la colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

La variable A représente la matrice et la variable indicée $a_{2,3}$ représente l'élément de la deuxième ligne et de la troisième colonne de ce tableau de nombres. La virgule entre les deux indices est facultative; elle peut être omise si cela ne crée pas de confusion.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, la variable indicée $a_{2,3} = 8$ et $a_{3,1} = 4$.

Il est à noter que les variables indicées peuvent prendre n'importe quelle valeur, mais que les indices sont des nombres entiers positifs.

Il arrive fréquemment que l'on utilise une expression algébrique pour définir une variable indicée. Dans ce cas, l'indice est lui-même une variable. Soit la variable indicée s_n qui représente la somme des *n* premiers nombres entiers positifs. On constate que la valeur de cette variable peut être calculée par la formule $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$. La somme des cinq premiers entiers positifs est $s_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5(5+1)}{2} = 15$.

Si on veut la somme des 6 premiers nombres entiers, on aura : $s_6 = 1+2+3+4+5+6 = \frac{6(6+1)}{2} = 21$

Les exposants et les radicaux peuvent aussi être utilisés dans les expressions algébriques de la même façon qu'on le fait avec les nombres : a^2 ou $\sqrt{x}$. On peut aussi utiliser des variables comme exposants : 2^n. Il est à noter que l'exposant n'affecte que la dernière variable écrite, à moins qu'il n'y ait des parenthèses.

$AB^3 = A \times B \times B \times B$ mais $(AB)^3 = (AB)(AB)(AB)$

Si $z = 5$, alors $(-z)^2 = 25$ mais $-z^2 = -(z)(z) = -25$

Les symboles des opérations mathématiques

On utilise différents autres symboles pour former des expressions algébriques. Les signes habituels utilisés pour représenter l'addition et la soustraction sont les mêmes dans les expressions algébriques qu'en arithmétique. Ainsi, l'expression algébrique $x+\pi$ représente la somme de la variable x et de la constante π ; x_2-7 fait référence à la différence entre x_2 et le nombre 7. Si x_2 prend la valeur 12, l'expression x_2-7 prendra la valeur 5.

Par contre, le symbole de multiplication n'est à peu près jamais utilisé dans les expressions algébriques. Pour indiquer la multiplication de deux variables, on les place simplement l'une à côté de l'autre. Dans la formule $FV=PV\left(1+IN\right)$ les variables I et N doivent être multipliées, car il n'y a aucun symbole entre elles. Lorsqu'un nombre est placé directement devant une variable, il multiplie cette variable : $3y$ indique que l'on doit multiplier le nombre 3 par la valeur de la variable y. Si la variable y prend la valeur 5, l'expression algébrique $3y$ prendra la valeur 15.

Il est important de se rappeler que, en algèbre, les opérations ne s'effectuent pas nécessairement dans l'ordre où elles sont écrites. La multiplication a priorité sur l'addition et la soustraction, c'est à dire que les multiplications doivent être effectuées avant les additions et les soustractions à moins que des parenthèses ne viennent modifier cet ordre[2].

$3+5\times 4=3+20$, car la multiplication doit s'effectuer d'abord.

$=23$

Reprenons la formule $FV=PV\left(1+IN\right)$ et calculons la valeur de FV si $PV=$ 400 \$, $I=5\ \%$ et $N=$ 3 ans.

$FV=400\ (1+0{,}05\times 3)$

Les valeurs de *I* et *N* doivent être multipliées.

$FV=400\left(1+0{,}15\right)$

L'addition peut alors se faire.

$FV=400\left(1{,}15\right)$

Toutes les opérations à l'intérieur d'une parenthèse doivent être effectuées pour utiliser ensuite le résultat obtenu.

$FV=460$

L'opération à effectuer est la multiplication puisqu'il n'y avait aucun signe d'opération entre 400 et la parenthèse.

2. Les règles de priorité ont été décrites à la section 2 du module 1.

On n'utilise que très rarement le symbole de division (÷) dans une expression algébrique; on utilise plutôt la notation des fractions. Dans la fraction $\frac{3}{4}$, la barre de fraction représente l'opération de division; $\frac{3}{4}$ est une notation équivalente pour 3 ÷ 4. L'expression $\frac{x}{5}$ signifie que la valeur de la variable x doit être divisée par 5. De même, pour trouver la valeur approximative de $\frac{2\pi}{3}$, on multiplie π (3,1416) par 2 et on divise le résultat par 3; on obtient alors 2,0944.

Tout comme la multiplication, la division aussi a priorité sur l'addition et la soustraction. La barre de fraction permet de modifier cette priorité et d'éviter l'usage abusif des parenthèses.

Déterminons la valeur des expressions suivantes pour $a=5$, $b=7$, $c=10$ et $d=2$.

$$a+\frac{b}{c}=5+\frac{7}{10}=5{,}7$$

Comme la division a priorité sur l'addition, on divise d'abord 7 par 10.

$$\frac{a+b}{c}=\frac{5+7}{10}=\frac{12}{10}=1{,}2$$

La barre de fraction vient modifier la priorité. On doit effectuer tout ce qui est au-dessus de la barre de fraction avant d'effectuer la division.

$$\frac{a}{c-d}=\frac{5}{10-2}=\frac{5}{8}=0{,}625$$

La barre de fraction vient modifier la priorité. On doit effectuer tout ce qui est au-dessous de la barre de fraction avant d'effectuer la division.

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{7}{5}+\frac{2}{10}=1{,}6$$

La division a priorité : 1,4 + 0,2 = 1,6.

$$\frac{b+d}{a+c}=\frac{7+2}{5+10}=\frac{9}{15}=0{,}6$$

$b+d=9, a+c=15$.

La division de 9 par 15 donne 0,6.

La sommation

Dans plusieurs domaines, notamment en statistiques et en recherche opérationnelle, on doit souvent représenter l'addition d'une grande quantité de nombres. Comme on l'a indiqué précédemment, on utilise des variables indicées pour représenter chacun des nombres.

Par exemple, si la variable x_i représente les recettes d'une entreprise pour la *i*ème journée de l'année, on aimerait pouvoir écrire la somme des recettes annuelles autrement que par l'expression : $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+\ \ldots+x_{365}$. Bien que cette façon de faire soit acceptable, il en existe une plus concise et plus souple. Elle utilise la lettre grecque sigma Σ, que l'on appelle dans ce contexte le *symbole de sommation.* Avec cette méthode, la somme précédente s'écrit :

$\sum_{i=1}^{365} x_i$ et se lit : « la somme, pour i égale 1 à 365, des x_i ».

La variable *i* est l'indice. Sous le symbole de sommation, on indique la variable qui sert d'indice et sa valeur de départ ($i=1$). Au sommet de sigma, on indique la valeur maximale de l'indice (ici 365). Enfin, le terme qui suit le symbole est celui qui sera additionné autant de fois qu'indiqué, mais en augmentant l'indice de 1 à chaque fois.

L'indice peut représenter le numéro d'une donnée comme dans l'exemple précédent, mais il peut aussi être utilisé pour calculer la valeur de chacun des éléments de la somme. Par exemple :

$$\sum_{i=1}^{8} i = 1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

et

$$\sum_{i=0}^{3} 2^i = 2^0+2^1+ \ 2^2+2^3=1+2+4+8=15$$

et

$$\sum_{k=2}^{5} 10k = 10(2)+10(3)+10(4)+10(5)=20+30+40+50=140$$

L'indice peut aussi être utilisé plus d'une fois dans une expression. Cette situation est fréquente en statistiques. Voici un tableau de distribution des résultats d'un groupe d'élèves à un test de connaissances.

Tableau 2.1
La distribution des résultats d'un groupe d'élèves à un test de connaissances

Résultats obtenus (x_i)	Nombre d'élèves ayant eu ce résultat (f_i)
5	7
6	12
7	14
8	21
9	13
10	3

On pourrait représenter les différents résultats obtenus par la variable indicée x_i et le nombre de fois où chacun de ces résultats a été obtenu par la variable indicée f_i .

Dans cet exemple, $x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 7, x_4 = 8, x_5 = 9, x_6 = 10, f_1 = 7, f_2 = 12, f_3 = 14, f_4 = 21, f_5 = 13 \text{ et } f_6 = 3$ $x_1 = 5,\ x_2 = 6, x_3 = 7, x_4 = 8, x_5 = 9, x_6 = 10, f_1 = 7, f_2 = 12, f_3 = 14, f_4 = 21, f_5 = 13 \text{ et } f_6 = 3$. Si on désire calculer la moyenne des résultats obtenus à ce test, on doit additionner chaque résultat autant de fois qu'il y a d'élèves qui ont obtenu ce résultat et ensuite diviser le tout par le nombre total d'élèves.

$$\text{Moyenne} = \frac{5\times7+6\times12+7\times14+8\times21+9\times13+10\times3}{7+12+14+21+13+3} = \frac{520}{70} \cong 7{,}4$$

Si on désire représenter ces opérations à l'aide de variables, on peut écrire :

$$\text{Moyenne} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6}$$

ou mieux :

$$\text{Moyenne} = \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i}$$

Il arrive parfois que certains auteurs omettent les valeurs de départ et d'arrivée de l'indice lorsque le contexte rend ces valeurs évidentes $\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$.

Des chiffres et des lettres

Une *expression algébrique* formée par la multiplication (ou la division) de nombres, de variables, de constantes ou d'expressions algébriques entre parenthèses se nomme un *terme*. Les différents éléments énumérés peuvent être affectés par des exposants. Les expressions $5xy$, x^4yz , $\frac{3a^4}{5x}$, $\frac{4}{3}\pi r^2 h$, $PV(1+ni)$, $3A_2B, -7k$ et 180 sont des termes. Mais les expressions suivantes ne sont pas des termes : $A+B$, $7-x-y^2$, R^2-r^2 , $a_{1,2}+a_{3,3}$, $1+IN$ et $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}+5$; ce sont des expressions algébriques formées de plusieurs termes, car ce sont des **sommes** et non des **produits**. Dans l'expression algébrique $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}+5$, 5 est un *terme constant*, un terme qui ne contient pas de variable.

Le nombre que l'on retrouve habituellement dans un terme et qui est normalement placé au début de ce terme est appelé le *coefficient.* Le nombre 5 est le coefficient du terme $5xy^2$; $\frac{4}{3}$ est celui de $\frac{4}{3}\pi r^2 h$; – 2 est celui de $-2x_3$. Si aucun nombre ne précède les variables, le coefficient est 1, ou – 1 quand le terme est précédé d'un signe « – ». Le coefficient de x^4y^5 est 1, celui de $-kmn$ est – 1.

En algèbre, on appelle *facteurs* les différentes quantités que l'on multiplie pour obtenir un produit. Les nombres, variables ou constantes qui constituent un terme, sont donc des facteurs de ce terme. Par exemple, 5, x et *y* sont les trois facteurs qui forment le terme $5xy$; $\frac{4}{3}$, π, r^2 et h sont les facteurs de $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. Comme la division peut toujours être considérée comme une multiplication par l'inverse du diviseur, on dira que $\frac{3}{5}$, a^4 et $\frac{1}{x}$ sont les facteurs de $\frac{3a^4}{5x}$. Parfois, un facteur peut être une expression entre parenthèses, comme dans la formule de calcul de la capitalisation d'intérêt simple : $PV(1+IN)$. PV est l'un des facteurs et l'autre est l'expression $(1+IN)$.

Si les variables d'un terme n'ont que des **exposants entiers et positifs**, ce terme est appelé un *monôme*. $2x^2$ et $3y^5$ sont des monômes. Une somme ou une différence de monômes est appelée un *polynôme*. $2x^2+3y^5-5z^4$ est un polynôme, $5^{-2}x^3-7b^2$ aussi, car l'exposant négatif affecte le coefficient et non une variable. $x-y+z$ est également un polynôme : comme il n'y a pas d'exposant indiqué pour les variables, c'est que cet exposant est 1, qui est un nombre entier positif.

Les expressions $3x^{-2}+4y$ et $5+x^{1/2}$ ne sont pas des polynômes, car des variables ont des exposants qui ne sont pas des entiers positifs. L'expression $\frac{x}{y}+5z$ est équivalente à $xy^{-1}+5z$ et n'est donc pas un polynôme, car elle comporte un exposant négatif pour une variable. De même, comme $3y+\sqrt{x}$ est une expression équivalente à $3y+x^{1/2}$, elle n'est pas un polynôme.

Les relations entre les expressions algébriques

Comme les nombres, les constantes, les variables et les expressions algébriques peuvent être comparées à l'aide de différents symboles : =, ≠, ≅, <, ≤, > et ≥ (ces symboles sont expliqués au tableau 1.3 du module 1). Dans certains cas, il est possible de déterminer l'exactitude (ou l'inexactitude) de ces comparaisons. Par exemple, $x^2>-5$ est une proposition toujours vraie, quelle que soit la valeur que l'on attribue à la variable x. Il en est de même pour l'égalité $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, même si c'est moins évident dans ce dernier cas.

La plupart du temps, toutefois, la vérité d'une proposition contenant des variables dépend justement des valeurs que l'on donne aux variables. La recherche de ces valeurs est une partie importante des mathématiques. Il s'agit de la résolution de systèmes d'équations ou d'inéquations qui est étudiée au module 3. Mais, examinons d'abord comment effectuer différentes opérations sur des expressions algébriques; ce sera l'objet de la prochaine section.

NOTE : Faites les exercices de la section 1 dans le *Recueil des activités pratiques* avant de continuer la lecture.

Section 2 : la transformation des expressions algébriques

Quand les valeurs prises par les variables sont connues, il est possible d'évaluer la valeur correspondante des expressions algébriques[3] où elles sont présentes. Mais dans l'étude de modèles mathématiques, il arrive très fréquemment que la valeur numérique d'une expression n'ait aucunement besoin d'être évaluée. On désire au contraire effectuer des calculs qui seront valides quelles que soient les valeurs prises par les variables. On cherche donc à simplifier ou à réécrire autrement des expressions algébriques. Dans cette section, on examinera quelques-unes des façons de transformer des expressions algébriques en expressions algébriques équivalentes, soit par des opérations mathématiques sur ces expressions, soit par leur simplification ou leur factorisation.

Les opérations sur les expressions algébriques

Les expressions algébriques peuvent être additionnées, soustraites, multipliées ou divisées. Les règles à respecter pour chacune des opérations sont relativement simples, mais essentielles.

L'addition (et la soustraction) des expressions algébriques

Pour additionner des termes ou des polynômes, il est essentiel de bien comprendre la notion de *termes semblables*. On dit que deux termes sont semblables s'ils contiennent les mêmes variables – peu importe leurs positions dans le terme – affectées des mêmes exposants et des mêmes indices, s'il y a lieu. On peut dire également que deux termes sont semblables s'ils ne diffèrent que par leurs coefficients. Par exemple, $3xy^2$ et $-8xy^2$ sont des termes semblables, mais $5x^2y$ n'est pas semblable aux deux précédents; $6ab^3$ est semblable à $8b^3a$, mais non à $7ab^3c$; $3r^2h$ est semblable à πr^2h, car π est une constante et non une variable; $5X_{2,3}$ et $6X_{3,2}$ ne sont pas des termes semblables, car leurs indices sont différents.

Imaginons maintenant que vous ayez 3 vis dans une main et 4 vis dans l'autre; il est tout à fait naturel d'additionner les vis que vous avez dans chacune des mains et de dire que vous avez 7 vis en tout. Mais si vous avez 3 vis et 4 bas, l'addition n'a plus de sens et n'est pas possible. On procède de façon analogue pour l'addition d'expressions algébriques. L'expression $3vis+4vis$ pourra s'écrire $7vis$. Mais si on veut additionner deux termes formés par des variables qui ne sont pas toutes les mêmes, $3vis+4bas$, par exemple, l'addition ne peut s'effectuer et la somme s'écrira $3vis+4bas$.

3. L'étude de ce sujet nécessite une bonne capacité d'abstraction et beaucoup de concentration. On peut plus difficilement s'appuyer sur des situations réelles étant donné que les calculs doivent être très généraux et s'appliquer quelle que soit la situation.

Pour l'addition des expressions algébriques, on doit toujours se rappeler de la règle suivante : **seule l'addition des termes semblables peut être effectuée.**

Lorsque l'on additionne des termes semblables, seuls les coefficients s'additionnent. La partie formée par les variables, leurs exposants et leurs indices restera inchangée. La somme est donc un terme semblable à ceux que l'on additionne.

EXEMPLES :

$3abc + 8abc = 11abc$

$4{,}5xy^2 + 7{,}3xy^2 + 6{,}4xy^2 = 18{,}2xy^2$

$\frac{3}{5}V_2 + \frac{2}{3}V_2 = \frac{19}{15}V_2$

$3xy + 5ab + 4xy = 7xy + 5ab$

$-3y^2z - 8y^2z = -11y^2z$

$6mnp^3 - \left(-2mnp^3\right) + mnp^4 = 8mnp^3 + mnp^4$

$6a + a + 8b - b = 7a + 7b$

Pour ce qui est des variables indicées, on sait que deux variables qui n'ont pas le même indice sont différentes; on ne peut donc pas effectuer l'addition si les indices sont différents. Si l'indice est le même, l'addition se fait comme dans le cas de variables non indicées.

EXEMPLES :

$2x_3 + 3x_4 + 5x_4 = 2x_3 + 8x_4$

$-5a_{1,2} + 3a_{2,1} + 2a_{1,2} = -3a_{1,2} + 3a_{2,1}$

Pour additionner des polynômes, on regroupe les termes semblables que l'on retrouve dans ces polynômes puis on effectue l'addition des coefficients de ces termes.

EXEMPLES :

$\left(5x + 3y - 5z\right) + \left(4x - 3y + v\right) + \left(y - z - v\right)$

$= \left(5x + 4x\right) + \left(3y - 3y + y\right) + \left(-5z - z\right) + \left(v - v\right)$

$= 9x + y - 6z$, car $1y$ s'écrit y . *De plus, on n'a pas à écrire le terme en* v , car $0v = 0$

ou :

$5x + 3y - 5z + 4x - 3y + v + y - z - v$

$= 9x + y - 6z$

En algèbre, la soustraction est traitée de la même façon que l'addition : toute soustraction peut être ramenée à une addition en utilisant l'opposé du second terme. L'*opposé d'un nombre* s'obtient en changeant son signe. L'*opposé d'un terme* est obtenu en changeant le signe de son coefficient. L'*opposé d'une expression algébrique* contenant plusieurs termes s'obtient en changeant le signe de chacun des termes de cette expression. – 3 est l'opposé de 3 et 7 est l'opposé de – 7; $3ab^6$ est l'opposé de $-3ab^6$. De même, $-3x+2y^3$ est l'opposé de $3x-2y^3$ et $3x^4yz+5abc$ est l'opposé de $-3x^4yz-5abc$.

Soustraire un nombre b d'un nombre a ou effectuer l'opération $a-b$ a le même sens qu'additionner a et l'opposé de b. Soustraire une deuxième expression algébrique d'une première signifie additionner la première à l'opposé de la deuxième.

EXEMPLES :

$$7-(-6)=7+(6)=13$$

$$-3x-(2x)=-3x+(-2x)=-5x$$

$$(4x-2y)-(-2x+5y)=(4x-2y)+(2x-5y)=(4x+2x)+(-2y-5y)=6x-7y$$

Les exemples précédents nous aident à comprendre pourquoi la soustraction est considérée comme l'addition. Seuls les signes de la quantité à soustraire sont changés. Pour le reste, c'est une addition.

La multiplication des expressions algébriques

Avez-vous déjà remarqué que, lorsque l'on effectue une multiplication de mesures, le résultat obtenu ne s'exprime pas dans les mêmes unités que les quantités que l'on a multipliées? Par exemple, pour calculer l'aire d'une pièce ou d'un terrain rectangulaire, on doit multiplier la longueur par la largeur. Un terrain de 30 mètres de long sur 10 mètres de large a une aire de 300 mètres carrés. La longueur et la largeur sont mesurées en mètres, mais l'aire est exprimée en mètres carrés. C'est par un procédé analogue que l'on effectue la multiplication de deux facteurs composés d'un seul terme.

Pour effectuer la multiplication de deux facteurs ne comportant qu'un seul terme, on multiplie d'abord les coefficients. Ensuite, pour chacune des variables utilisées dans **l'un ou l'autre des facteurs**, on garde cette variable et elle est affectée d'un exposant égal à la somme des exposants que l'on retrouve dans les facteurs.

EXEMPLE 1 :

Multiplier $3x^2$ par $4x^3y^2$

SOLUTION

$$(3x^2)(4x^3y^2)=12x^5y^2$$

En effet, le coefficient du produit est le résultat de la multiplication des coefficients : $(3)(4)=12$. L'exposant de la variable x dans le produit est la somme de ses exposants dans les facteurs : $2+3=5$. Pour la variable *y*, comme elle est utilisée dans un seul des facteurs, elle doit apparaître au résultat et son exposant reste le même.

EXEMPLE 2 :

$(4x^2y^3z)(-2x^3y)(5x^{-1}y^5)$

Quand il y a plus de deux facteurs, les mêmes règles s'appliquent. La règle des signes de la multiplication s'applique pour les coefficients, mais c'est la règle des signes de l'addition qui s'applique pour les exposants. Le produit doit comprendre toutes les variables, même celles que l'on ne retrouve que dans un seul facteur. Si aucun exposant n'est indiqué pour une variable, c'est que cet exposant est 1.

$(4x^2y^3z)(-2x^3y)(5x^{-1}y^5)$

$= [4\times(-2)\times 5](x^{2+3-1})(y^{3+1+5})(z)$

$= -40x^4y^9z$

Si les expressions à multiplier ont la forme des fractions, on procède comme pour les fractions ordinaires : le résultat est une fraction dont le numérateur est le produit des numérateurs et dont le dénominateur est le produit des dénominateurs. En d'autres termes, on n'a qu'à multiplier les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble.

Par exemple : $\left(\frac{3x^2}{5y}\right)\left(\frac{2ax}{-7y}\right)=\left(\frac{6ax^3}{-35y^2}\right)$

Si l'une des expressions n'a pas de dénominateur, c'est que la valeur de ce dernier est 1 :

$$\left(\frac{2}{ab}\right)(5cd)=\left(\frac{2}{ab}\right)\left(\frac{5cd}{1}\right)=\left(\frac{10cd}{ab}\right)$$

Pour la multiplication de deux expressions comprenant plusieurs termes, on n'a qu'à multiplier chacun des termes de la première par chacun des termes de la seconde, puis additionner les résultats obtenus. C'est le cas notamment des polynômes.

EXEMPLE 1 :

$(a+b)(c+d)$

Chacun des facteurs est un polynôme comportant deux termes. On doit multiplier le premier terme, *a*, par chacun des termes du deuxième polynôme (*c* + *d*); ensuite, on multiplie le deuxième terme, *b*, par les mêmes termes *c* et *d*. Le produit est constitué par la somme de ces résultats.

$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Comme on ne retrouve pas de termes semblables, le produit demeure $ac+ad+bc+bd$.

EXEMPLE 2 :

$(2x-3y)(5x+7y)$

$(2x-3y)(5x+7y)=(2x)(5x)+(2x)(7y)+(-3y)(5x)+(-3y)(7y)$
$=(10x^2)+(14xy)+(-15xy)+(-21y^2)$
$=10x^2+14xy-15xy-21y^2$ (puisqu'il y a des termes semblables, on doit les additionner)
$=10x^2-xy-21y^2$

EXEMPLE 3 :

$-5xy^2(2x^2+3xy-4y^3)$

Même si l'une des expressions ne comporte qu'un terme, les mêmes règles s'appliquent.
$-5xy^2(2x^2+3xy-4y^3)$
$=(-5xy^2)(2x^2)+(-5xy^2)(3xy)+(-5xy^2)(-4y^3)$
$=-10x^3y^2-15x^2y^3+20xy^5$

EXEMPLE 4 :

$\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{b}-1\right)$

$\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{b}-1\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)(-1)+(1)\left(\frac{a}{b}\right)+(1)(-1)$
$=\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+\frac{a}{b}-1=\frac{a^2}{b^2}-1$

Évidemment, il ne faut pas confondre les exposants et les indices. Alors que l'on doit additionner les exposants, les indices demeurent inchangés, car deux variables ayant des indices différents sont des variables distinctes.

EXEMPLE 5 :

$(x_2+a^3)(x_3-a^2)$ x_2 et x_3 sont des variables différentes
$(x_2+a^3)(x_3-a^2)=(x_2)(x_3)+(x_2)(-a^2)+(+a^3)(x_3)+(+a^3)(-a^2)$
$=x_2x_3-x_2a^2+a^3x_3-a^5$

La division des expressions algébriques

De la même façon que la soustraction est assimilée à l'addition, en algèbre, la division peut se ramener à la multiplication. Cette fois-ci, c'est le concept d'*inverse* d'un nombre ou d'une expression qu'il faut bien comprendre. L'inverse d'une fraction est la fraction obtenue en permutant le numérateur et le dénominateur de cette fraction. L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$, celui de $-\frac{3x}{4y}$ est $-\frac{4y}{3x}$, celui de $\frac{1}{ab}$ est ab, celui de x^2 est $\frac{1}{x^2}$. **Mais attention! Le nombre 0 n'a pas d'inverse**, on obtient plutôt quelque chose qui tend vers l'infini (noté ∞).

Diviser une première expression par une deuxième, c'est multiplier la première par l'*inverse de la seconde*. Comme la division est ramenée à une multiplication, c'est la règle des signes de la multiplication qui s'applique.

EXEMPLE 1 :

$$\frac{2x}{3y} \div \frac{5c}{7d}$$

$$\frac{2x}{3y} \div \frac{5c}{7d} = \frac{2x}{3y} \times \frac{7d}{5c} = \frac{14dx}{15cy}$$

EXEMPLE 2 :

$$-3N \div \frac{5i}{3k}$$

$$-3N \div \frac{5i}{3k} = \frac{-3N}{1} \times \frac{3k}{5i} = \frac{-9kN}{5i}$$

Si le numérateur et le dénominateur sont des expressions algébriques ne comportant qu'un terme, on peut effectuer la division de manière analogue à la multiplication. Dans ce cas toutefois, on divise les coefficients et on soustrait les exposants des variables.

EXEMPLE 1 :

$$12x^5 \div 3x^2$$

$$12x^5 \div 3x^2 = \frac{12x^5}{3x^2} = 4x^{5-2} = 4x^3$$

EXEMPLE 2 :

$$5y^2z \div 10y^7$$

$$5y^2z \div 10y^7 = \frac{5y^2z}{10y^7} = 0,5y^{2-7}z = 0,5y^{-5}z \text{ ou } \frac{z}{2y^5} \text{ ou } \frac{0,5z}{y^5}$$

EXEMPLE 3 :

$$3a_4 \div 10N$$

$$3a_4 \div 10N = \frac{3a_4}{10N} \text{ ou } 0,3a_4N^{-1}$$

Comme la variable N ne se retrouve pas au numérateur, on doit considérer que son exposant est 0 pour effectuer la soustraction des exposants : $N^{0-1} = N^{-1}$.

Dans le cas où le numérateur comporte plus d'un terme, mais que le dénominateur ne comporte qu'un seul terme, il est encore possible d'effectuer la division. Dans ce cas, toutefois, il faudra diviser chacun des termes du numérateur par le dénominateur.

EXEMPLE 1 :

$$\frac{6k^7 - 14k^4 j}{2k^3}$$

$$\frac{6k^7 - 14k^4 j}{2k^3} = \frac{6k^7}{2k^3} + \frac{-14k^4 j}{2k^3} = 3k^4 - 7kj$$

EXEMPLE 2 :

$$\frac{6x^2}{3x} + 3x$$

$$\frac{6x^2}{3x} + 3x = 2x + 3x = 5x$$

Attention! $\frac{6x^2}{3x} + 3x$ est une expression différente de $\frac{6x^2 + 3x}{3x}$. Dans le premier cas, seul $6x^2$ doit être divisé par $3x$; ensuite, on fait l'addition. Dans le deuxième cas, chacun des termes du numérateur doit être divisé par le dénominateur.

$$\frac{6x^2 + 3x}{3x} = \frac{6x^2}{3x} + \frac{3x}{3x} = 2x + 1$$

EXEMPLE 3 :

$$\frac{7xy^3 + 5x^3}{-x^2} = -7x^{-1}y^3 - 5x \text{ ou } \frac{-7y^3}{x} - 5x$$

Il reste enfin le cas où le dénominateur est un polynôme ou une expression comportant plusieurs termes. C'est un cas passablement plus difficile et nous ne l'aborderons pas dans le cadre de ce cours.

La simplification et la factorisation

Il arrive assez souvent qu'il soit possible d'obtenir une fraction plus simple équivalente à une fraction donnée. On sait déjà qu'une fraction comme $\frac{4}{8}$ peut se simplifier et que le résultat est une fraction équivalente, dans ce cas-ci $\frac{1}{2}$. On se rend compte que l'on a divisé le numérateur et le dénominateur par un même nombre : 4. C'est exactement ce que nous allons faire avec les fractions rationnelles qu'on appelle habituellement expressions rationnelles. Comme la division n'est pas une opération simple, nous allons utiliser une méthode légèrement différente. L'obtention d'une fraction ou d'une expression rationnelle équivalente plus simple s'appelle la *simplification*.

Il s'agit de transformer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs. Quand un même facteur se retrouve à la fois au numérateur et au dénominateur, on peut l'éliminer s'il est différent de 0. Ce que l'on fait en réalité dans ce cas, c'est que l'on divise le numérateur et le dénominateur par ce facteur que l'on retrouve à la fois au numérateur et au dénominateur. L'expression rationnelle $\frac{77abc}{88xyc}$ est, suivant la règle d'associativité, équivalente à $\frac{(11)7abc}{(11)8xyc}$; on constate que le facteur 11 et le facteur c se retrouvent tous les deux autant au numérateur qu'au dénominateur. On peut donc les simplifier (les éliminer). On obtient la fraction suivante $\frac{7ab}{8xy}$, qui est équivalente à la première, mais qui est plus simple.

La simplification est intéressante surtout quand le numérateur, le dénominateur ou les deux sont des polynômes. Mais pour pouvoir simplifier, le numérateur et le dénominateur doivent absolument être des produits de facteurs, ce qui n'est pas le cas lorsque l'un ou l'autre est un polynôme. On doit donc pouvoir transformer un polynôme en un produit de facteurs. Cette opération s'appelle la *factorisation* ou la *décomposition en facteurs*.

Il existe plusieurs procédés permettant de factoriser des polynômes. Nous verrons dans cette sous-section les cinq cas les plus courants et, donc, les plus utiles. Ce sont :

– la factorisation par la mise en évidence simple,
– la factorisation par la double mise en évidence,
– la factorisation des différences de carrés,
– la factorisation des trinômes de la forme $x^2 + pxy + qy^2$,
– la factorisation des trinômes carrés parfaits.

C'est la forme du polynôme qui vous permettra de distinguer lequel de ces cas s'applique dans les différentes situations qui peuvent se présenter.

La factorisation par la mise en évidence simple

Dans chacun des exemples suivants, on a multiplié un facteur ne contenant qu'un terme par un autre facteur constitué par un polynôme. Dans la colonne de gauche, on a placé les deux facteurs et dans celle de droite, le résultat de leur multiplication. Il est facile de vérifier, en effectuant la multiplication, que l'expression de gauche est bien égale à celle de droite.

EXEMPLES :

$3x(a+b+c) \quad = \quad 3ax+3bx+3cx$

$2N(m+3p-5q^2+7) \quad = \quad 2mN+6Np-10Nq^2+14N$

$x(2+x+x^2) \quad = \quad 2x+x^2+x^3$

La factorisation consiste à faire l'opération inverse, c'est-à-dire à trouver l'expression de gauche à partir de celle de droite. Que remarque-t-on en examinant l'expression de droite? Dans le premier exemple, le facteur 3 et le facteur x se retrouvent dans chacun des termes du produit. Dans le deuxième exemple, même si l'on ne retrouve pas directement le nombre 2 dans chacun des termes, on retrouve ce nombre comme facteur de chacun des coefficients du produit. C'est la présence de ces facteurs dans chacun des termes du produit qui permet de « défaire » ce produit et de retrouver les facteurs qui ont été multipliés.

Comment reconnaître qu'il s'agit d'une mise en évidence simple?

Une seule condition : on doit retrouver au moins un facteur qui est commun à tous les termes du polynôme. Par exemple, le facteur x se retrouve dans tous les termes du polynôme : $x^2-3x+4xy$.

Technique de factorisation par la mise en évidence simple

- Déterminer le ou les facteurs qui sont communs à tous les termes du polynôme que l'on désire factoriser.
- Placer ces facteurs communs en évidence, c'est-à-dire devant une parenthèse (propriété de l'associativité).
- Placer dans la parenthèse le résultat de la division de chacun des termes du polynôme par les facteurs placés en évidence.

Par exemple, dans le polynôme $x^2-3x+4xy$, on peut voir que le facteur commun à chacun des termes est x. On place x en évidence : « x ». Par la suite, on inscrit entre parenthèses le résultat de la division de chacun des termes de $x^2-3x+4xy$ par x, soit $x(x-3+4y)$.

EXEMPLE :

$10x^3y+15x^2y^2-25xy^3$

Le facteur commun est $5xy$. En le mettant en évidence et en effectuant la division, on obtient :

$$5xy\left(\frac{10x^3y}{5xy}+\frac{15x^2y^2}{5xy}+\frac{-25xy^3}{5xy}\right)=5xy\left(2x^2+3xy-5y^2\right)$$

Remarques :

- Pour qu'une variable puisse être mise en évidence, elle doit apparaître dans chacun des termes :

  $3xy+6xz+18xz-35yz$ ne peut pas être factorisé parce qu'aucune des variables x, y ou z ne se retrouve dans chacun des facteurs et qu'aucun nombre entier (différent de 1) ne divise chacun des coefficients.

- Si une variable se trouve dans chacun des termes du polynôme avec différents exposants, on doit la mettre en évidence avec le plus petit exposant qu'on lui trouve.

  $7x^5-14x^8+49x^3=7x^3\left(x^2-2x^5+7\right)$

- La division d'un nombre par lui-même donne 1.

  $3x^2-12xy+3x=3x\left(x-4y+1\right)$

- Le signe du facteur mis en évidence peut être aussi bien positif que négatif.

  $-24abc^2+36ab^2c-60a^2bc=12abc\left(-2c+3b-5a\right)=-12abc\left(2c-3b+5a\right)$

- Dans certains cas, le facteur mis en évidence peut être une parenthèse complète.

  $3x\left(a+b\right)-4y\left(a+b\right)-5\left(a+b\right)=\left(a+b\right)\left(3x-4y-5\right)$, car $\left(a+b\right)$ est un facteur commun à chacun des termes du polynôme.

La factorisation par la double mise en évidence

$$\left(a+b\right)\left(c+d\right) = ac+ad+bc+bd$$

$$\left(2x-3y\right)\left(5m-7n\right) = 10mx-14nx-15my+21ny$$

$$\left(x+3\right)\left(y+1\right) = xy+x+3y+3$$

En examinant les multiplications précédentes, que remarquez-vous dans le produit? Le nombre de termes du polynôme est pair et l'on retrouve un facteur commun dans les deux premiers termes et un autre dans les deux derniers.

Les polynômes que l'on peut décomposer en facteurs par double mise en évidence proviennent du produit de deux polynômes, le plus souvent de deux binômes (polynômes à deux termes).

Comment reconnaître qu'il s'agit d'une double mise en évidence?

Le polynôme à décomposer comporte au moins quatre termes et habituellement un nombre pair de termes et on retrouve au moins un facteur commun dans la moitié de ces termes et au moins un autre facteur commun dans les autres termes.

Technique de factorisation par la double mise en évidence

- Diviser le polynôme en deux parties en regroupant les termes qui ont le même facteur commun.
- Mettre en évidence le facteur commun dans la première partie selon la méthode habituelle et faire de même pour la deuxième partie.
- Si les deux parenthèses obtenues sont identiques, mettre cette parenthèse commune en évidence, toujours selon la même méthode.

Par exemple : $ac+ad+bc+bd$. Comme le facteur a se retrouve dans les deux premiers termes et le facteur *b* dans les deux derniers, on les regroupe de cette façon : $(ac+ad)+(bc+bd)$. On met ensuite a en évidence dans les deux premiers termes et b dans les deux derniers : $a(c+d)+b(c+d)$. Étant donné que la parenthèse obtenue est la même, on peut la mettre en évidence à son tour : $(c+d)$ $(a+b)$. Puisque la multiplication est une opération commutative, c'est-à-dire que le résultat est le même peu importe l'ordre des termes, les résultats $(c+d)$ $(a+b)$ et $(a+b)$ $(c+d)$ sont tout à fait équivalents.

Il arrive parfois que l'on doive choisir d'attribuer le signe négatif à l'un des facteurs mis en évidence pour obtenir la même parenthèse dans les deux cas :

EXEMPLE :

$10mx-14nx-15my+21ny=(10mx-14nx)+(-15my+21ny)$

$=2x(5m-7n)-3y(5m-7n)$

$=(5m-7n)\ (2x-3y)$

L'ordre dans lequel les termes sont placés n'est pas toujours celui dont on a besoin. Pour effectuer la double mise en évidence, il suffit alors de regarder où sont les facteurs communs et de disposer les termes en conséquence.

EXEMPLE :

$xy+3+3y+x$

Comme il n'y a pas de facteur commun à xy et 3, regroupons les termes autrement.

$(xy+x)+(3y+3)$

$=x(y+1)+3\ (y+1)=(y+1)\ (x+3)\ =$

Enfin, il existe des cas un peu particuliers où le seul facteur commun pour l'une ou l'autre des parties est 1 ou – 1.

EXEMPLE :

$6ab+3a+2b+1=(6ab+3a)+(2b+1)$

$= 3a(2b+1)+1(2b+1)$

$= (2b+1)(3a+1)$

La factorisation des différences de carrés

On a déjà fait remarquer qu'un polynôme contenant deux termes se nomme un binôme. On appelle le *conjugué* d'un binôme un autre binôme qui n'est différent du premier que par le signe entre les deux termes. Ainsi, $a-b$ est le conjugué de $a+b$; $2x+5y$ est le conjugué de $2x-5y$; $3x^5y^2+2$ est le conjugué de $3x^5y^2-2$.

Examinons ce qui se passe lorsque l'on multiplie un binôme par son conjugué.

$$(a-b)(a+b) = a^2+ab-ab-b^2 = a^2-b^2$$

$$(2x+5y)(2x-5y) = 4x^2-10xy+10xy-25y^2 = 4x^2-25y^2$$

$$(3x^5y^2+2)(3x^5y^2-2) = 9x^{10}y^4-6x^5y^2+6x^5y^2-4 = 9x^{10}y^4-4$$

Le résultat obtenu est toujours un binôme dont le premier terme est un carré et dont le deuxième terme est aussi un carré, mais précédé du signe moins. Le résultat est donc la différence de deux carrés. De plus, le premier terme de cette différence est le carré du premier terme des binômes qui ont été multipliés : a^2 est le carré de a, $4x^2$ est le carré de $2x$ et $9x^{10}y^4$ est le carré de $3x^5y^2$. Enfin, le deuxième carré de la différence est le carré du deuxième terme des binômes qui ont été multipliés : b^2 est le carré de b, $25y^2$ est le carré de $5y$ et 4 est le carré de 2.

Comment reconnaître qu'il s'agit d'une différence de carrés?

Le polynôme à décomposer comporte deux termes, l'un de signe positif, l'autre de signe négatif. De plus, ces deux termes sont des carrés, c'est-à-dire que leur coefficient est un carré parfait comme 1, 4, 9, 16, 25, 36, etc., et les exposants des variables sont tous pairs.

Technique de factorisation des différences de carrés

- Dès que l'on a identifié la différence de carrés, on sait que la factorisation donnera le produit d'un binôme par son conjugué.
- La première parenthèse comprend la somme des racines carrées **positives** des deux termes de la différence.
- La deuxième parenthèse contient le conjugué du premier binôme. Seul le signe est différent.

EXEMPLE 1 :

$c^2 - d^2$

En examinant le binôme $c^2 - d^2$, on constate qu'il s'agit d'une différence de carrés : « le carré de c moins le carré de d ». Ce polynôme est donc égal au produit d'un binôme par son conjugué : $c^2 - d^2 = (c + d)\ (c - d)$.

EXEMPLE 2 :

$4x^2 - 25y^2$

Comme $4x^2$ est le carré de $2x$ et que $25y^2$ est le carré de $5y$, on a une différence de carrés. La factorisation est immédiate : $4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)\ (2x - 5y)$.

EXEMPLE 3 :

$-169x^6 + 256y^{10}z^{2\,000}$

Ce polynôme est égal à $256y^{10}z^{2\,000} - 169x^6$. Comme les coefficients 256 et 169 sont des carrés parfaits et que les exposants des variables sont tous pairs, on a bien une différence de carrés. Remarquons que la racine carrée de y^{10} est y^5, car $(y^5)\ (y^5) = y^{10}$. De même, la racine carrée de $z^{2\,000}$ est $z^{1\,000}$. On peut factoriser par le produit d'un binôme par son conjugué :

– 169x6 + 256y10z2 000 = (16y5z1 000 + 13x3) (16y5z1 000 – 13x3).

La factorisation des trinômes de la forme $x^2 + pxy + qy^2$

Examinons les produits suivants :

$(x + 3)\ (x + 4)$	=	$x^2 + 4x + 3x + 12$	=	$x^2 + 7x + 12$
$(ab + 5)\ (ab - 7)$	=	$a^2b^2 - 7ab + 5ab - 35$	=	$a^2b^2 - 2ab - 35$
$(x^3 - 2c)\ (x^3 - 10c)$	=	$x^6 - 10x^3c - 2x^3c + 20c^2$	=	$x^6 - 12x^3c + 20c^2$
$(z + 6y)\ (z + 3y)$	=	$z^2 + 3yz + 6yz + 18y^2$	=	$z^2 + 9yz + 18y^2$

Du côté des facteurs qui sont multipliés, on remarque qu'il s'agit de paires de binômes qui ont le même premier terme et que ce terme a comme coefficient 1. Quand il y a des variables dans le deuxième terme, on retrouve les mêmes dans les deux binômes. Du côté du résultat de la multiplication, on constate que ce sont des trinômes (polynômes à trois termes).

Le *premier terme* de ce trinôme est le carré du premier terme commun des deux binômes multipliés et son coefficient est 1. Le *deuxième terme* du trinôme comporte les mêmes variables que les termes des binômes multipliés et son coefficient est égal à la somme des coefficients des deuxièmes termes des binômes. Le *troisième terme* est le produit des deuxièmes termes des binômes multipliés.

Ces caractéristiques permettent de retrouver rapidement les deux binômes multipliés à partir du trinôme.

Comment reconnaître qu'il s'agit d'un trinôme de la forme $x^2 + pxy + qy^2$?

On détermine si un trinôme a la forme indiquée et si on peut utiliser la technique qui suit pour le factoriser en vérifiant les conditions suivantes :

- Le premier terme a comme coefficient 1 et les exposants des variables du premier terme sont pairs.
- Si le troisième terme comporte des variables, elles ont des exposants pairs.
- Les variables du deuxième terme sont les mêmes que celles contenues dans les deux autres termes, mais leurs exposants sont diminués de moitié.

Dans ce modèle, p représente le coefficient du deuxième terme du trinôme et q le coefficient du troisième terme. Le trinôme suivant répond aux conditions : $x^{12}+5x^6c^3+6c^6$. Même si les exposants de l'exemple précédent sont plus grands que 2, il s'agit bien d'un trinôme de la forme $x^2+pxy+qy^2$.

Voyez-vous pourquoi les suivants ne sont pas de la forme $x^2+pxy+qy^2$?

$2x^2+3x+5$, $x^2+3x+2y^2$, $x^2+3xy+2$, $x^3+3xy+y^2$, $x^4+3xy+2y^2$

Technique de factorisation des trinômes de la forme $x^2 + pxy + qy^2$

- Après s'être assuré que le trinôme est bien de la forme $x^2+pxy+qy^2$, on sait que la factorisation comprend deux facteurs qui sont des binômes. Le premier terme à placer dans chacune des parenthèses est la racine carrée du premier terme du trinôme.
- Le deuxième terme de chacune des parenthèses a comme variables les mêmes que le troisième terme du trinôme, mais avec un exposant diminué de moitié.
- On doit ensuite trouver deux nombres dont la somme est p et le produit, q.
- Les coefficients des deuxièmes termes des binômes sont les nombres trouvés à l'étape précédente.

EXEMPLE 1 :

$x^2+7xy+10y^2$

Le trinôme est bien de la forme $x^2+pxy+qy^2$. La factorisation comprendra deux parenthèses et le premier terme de chacune sera la racine carrée de x^2 : $(x \quad)(x \quad)$. Les deuxièmes termes auront comme variable y : $(x \quad y)(x \quad y)$.

On doit maintenant trouver deux nombres dont la somme est 7 et dont le produit est 10. Ces deux nombres sont 2 et 5, car $2+5=7$ et $2\times5=10$. Ce sont les coefficients des deuxièmes termes et la factorisation est complétée : $x^2+7xy+10y^2=(x+2y)(x+5y)$. On peut facilement vérifier qu'en effectuant la multiplication des deux binômes, on obtient le trinôme que l'on voulait factoriser.

EXEMPLE 2 :

$y^4 - 17y^2 + 70$

Le premier terme des parenthèses sera y^2 et il n'y aura aucune variable dans les deuxièmes termes puisqu'il n'y en a pas dans le troisième terme du trinôme. (y^2) (y^2). Les deux nombres dont la somme est – 17 et le produit est +70 sont – 10 et – 7 (attention aux signes). Donc $y^4 - 17y^2 + 70 = \left(y^2 - 10\right)\left(y^2 - 7\right)$.

EXEMPLE 3 :

$a^2 + 2ab - 8b^2$

Dans chaque parenthèse, le premier terme est a et la variable pour le deuxième est b. Il faut être plus vigilant dans la recherche des deux coefficients lorsque le signe du troisième terme du trinôme est négatif comme c'est le cas dans cet exemple. Les deux nombres dont le produit est – 8 et la somme +2 sont : +4 et – 2. En effet, 4 + (– 2) = 2 et (4) (– 2) = – 8.

$a^2 + 2ab - 8b^2 = \left(a + 4b\right)\left(a - 2b\right)$

EXEMPLE 4 :

$N^2 + 20N + 100$

Il peut arriver que les deux nombres à trouver soient le même comme c'est le cas ici. En effet, les deux nombres dont le produit est 100 et la somme 20 sont 10 et 10.
$N^2 + 20N + 100 = \left(N + 10\right)\left(N + 10\right)$. On écrira de préférence : $\left(N + 10\right)^2$.

La factorisation des trinômes carrés parfaits

On a effectué le produit de quelques binômes par eux-mêmes, c'est-à-dire que l'on a calculé le carré de ces binômes. Examinons les résultats.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3x+2y)^2 = (3x+2y)(3x+2y) = 9x^2 + 6xy + 6yx + 4y^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

$$(5a-c)^2 = (5a-c)(5a-c) = 25a^2 - 5ac - 5ca + c^2 = 25a^2 - 10ac + c^2$$

Comme dans le cas précédent, deux des termes obtenus lors de la multiplication sont semblables et on peut effectuer leur addition. Le résultat est donc un trinôme.

Le premier et le troisième terme sont les carrés des deux termes du binôme, mais il y a un autre terme. Si on y regarde bien, on constate que ce terme est le produit des deux termes du binôme multiplié par 2.On peut résumer ces conclusions de la façon suivante : « Le carré d'un binôme est la somme des carrés de chacun de ses termes plus le double produit de l'un par l'autre. »

Comment reconnaître qu'il s'agit d'un trinôme carré parfait?

On sait qu'un terme est un carré parfait si son signe est positif, son coefficient est un carré parfait et les exposants de ses variables sont pairs. Quand deux termes d'un trinôme sont des carrés parfaits, ce trinôme est le carré d'un binôme si l'autre terme est égal au double produit des racines carrées des deux précédents.

EXEMPLES :

$9m^2+24mn+16n^2$ est un trinôme carré parfait, car $9m^2$ est le carré de $3m$, $16n^2$ est le carré de $4n$ et $24mn=2(3m)(4n)$.

$121r^2-44rs+4s^2$ est aussi un carré parfait, car $121r^2$ est le carré de $11r$, $4s^2$ est le carré de $-2s$ et $-44rs=2(11r)(-2s)$. Notez bien le signe.

$A^2+2AN-N^2$ n'est pas un trinôme carré parfait, car $-N^2$ n'est pas un carré à cause de son signe.

$4k^2+6jk+9j^2$ n'est pas un trinôme carré parfait parce que $6jk\neq 2(2k)(3j)=12jk$.

Technique de factorisation des trinômes carrés parfaits

- Vérifier si on a un trinôme carré parfait.
- Les racines carrées utilisées pour vérifier le double produit sont les termes du binôme que l'on élève au carré.
- Vérifier le signe qui sépare les deux termes du binôme. Ce doit être le même que celui du terme qui n'est pas un carré dans le trinôme.

EXEMPLE 1 :

$625a^2+200ad+16d^2$

Comme $625a^2$ est le carré de $25a$, que $16d^2$ est le carré de $4d$ et que $200ad=2(25a)(4d)$, il s'agit d'un trinôme carré parfait. Le signe entre les deux termes du binôme sera positif, car celui de $200ad$ est positif.

$625a^2 + 200ad + 16d^2 = (25a + 4d)^2$

EXEMPLE 2 :

$9z^{10}-30xyz^5+25x^2y^2$

$9z^{10}$ est le carré de $3z^5$, $25x^2y^2$ celui de $5xy$ et $-30xyz^5$ le double du produit de $3z^5$ par $-5xy$, on a un trinôme carré parfait et le signe entre les termes du binôme est négatif.

$9z^{10} - 30xyz^5 + 25x^2y^2 = \left(3z^5 - 5xy\right)^2$. Il est à noter que $\left(5xy - 3z^5\right)^2$ est une réponse tout aussi valable que la précédente; pourriez-vous expliquer pourquoi?

La factorisation multiple

Il arrive fréquemment qu'après avoir effectué une première décomposition en facteur, un ou plusieurs des facteurs obtenus soit à nouveau décomposable. Cette cascade de décomposition se nomme la factorisation multiple. Dans ce cas, il est possible que l'on doive avoir recours à plus d'un des procédés de factorisation que nous venons de voir.

Lorsque l'on doit résoudre un problème de factorisation multiple, il est très important de s'assurer que tous les facteurs ont été décomposés au maximum. Pour s'assurer que la factorisation est complète, il est donc préférable de prendre chaque facteur un à un et de vérifier chacun des cas dans l'ordre où ils ont été présentés ci-dessus.

EXEMPLE 1 :

$ax^2 - ay^2$

On peut d'abord effectuer une simple mise en évidence : $ax^2 - ay^2 = a\left(x^2 - y^2\right)$. Mais l'un des facteurs obtenus est décomposable, car il s'agit d'une différence de carrés.

$ax^2 - ay^2 = a\left(x^2 - y^2\right) = a\left(x + y\right)\left(x - y\right)$

EXEMPLE 2 :

$ax^2 - ay^2 + by^2 - bx^2$

Après avoir mis en ordre, on effectue d'abord une double mise en évidence qui découvre une différence de carrés.

$$\begin{aligned} ax^2 - ay^2 + by^2 - bx^2 &= ax^2 - bx^2 - ay^2 + by^2 \\ &= x^2\left(a - b\right) - y^2\left(a - b\right) \\ &= \left(a - b\right)\left(x^2 - y^2\right) \\ &= \left(a - b\right)\left(x + y\right)\left(x - y\right) \end{aligned}$$

EXEMPLE 3 :

$7x^4 - 21x^2 - 28$

Après avoir mis 7 en évidence, on découvre un trinôme de la forme $x^2 + pxy + qy^2$, mais ce n'est pas terminé.

$$\begin{aligned} 7x^4 - 21x^2 - 28 \quad &= 7\left(x^4 - 3x^2 - 4\right) \\ &= 7\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 1\right) \left(\text{car} - 4 + 1 = -3 \text{ et} \left(-4\right)\left(1\right) = -4\right) \\ &= 7\left(x - 2\right)\left(x + 2\right)\left(x^2 + 1\right) \end{aligned}$$

EXEMPLE 4 :

$x^2 + 2xy + y^2 - 49b^2$

Cet exemple est un peu plus difficile. On doit d'abord reconnaître que les trois premiers termes de ce polynôme constituent un trinôme carré parfait. Après avoir effectué cette première factorisation, on découvre une différence de carrés.

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 - 49b^2 \quad &= \left(x + y\right)^2 - 49b^2 \\ &= \left(x + y + 7b\right)\left(x + y - 7b\right) \end{aligned}$$

Les polynômes ne sont pas tous décomposables en facteurs. Même s'il existe d'autres techniques pour factoriser, un très grand nombre de polynômes ne peuvent être transformés en produit de facteurs. En voici quelques exemples.

EXEMPLES :

$x^2 + 1$

$x^2 + x + 1$

$3x + 2y + 3$

$a^2 + ab + a + 1$

Voici maintenant quelques exemples d'utilisation de la factorisation pour simplifier des expressions algébriques.

EXEMPLE 1 :

Simplifier l'expression $\dfrac{x^2 + 4x}{x^2 + 5x}$.

SOLUTION

$$\frac{x^2+4x}{x^2+5x}=\frac{x(x+4)}{x(x+5)}$$

On a effectué une mise en évidence simple au numérateur et au dénominateur. Comme x est un facteur qui se retrouve à la fois au numérateur et au dénominateur, on peut le simplifier :

$$\frac{x(x+4)}{x(x+5)}=\frac{x+4}{x+5}$$

EXEMPLE 2 :

Diviser x^2+5x+6 par x^2-9

SOLUTION

$$\left(x^2+5x+6\right)\div\left(x^2-9\right)=\left(x^2+5x+6\right)\left(\frac{1}{x^2-9}\right)=\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}=\frac{\left(x+2\right)\left(x+3\right)}{\left(x+3\right)\left(x-3\right)}$$

Il reste à simplifier le facteur ($x+3$). Le résultat est $\frac{x+2}{x-3}$.

EXEMPLE 3 :

Simplifier le produit des expressions $\frac{2x+2y+ax+ay}{a^2+4a+4}$ et $\frac{2+a}{x+y}$.

SOLUTION

Le produit est $\left(\frac{2x+2y+ax+ay}{a^2+4a+4}\right)\left(\frac{2+a}{x+y}\right)$. En factorisant, par double mise en évidence au numérateur et par la méthode des trinômes carrés parfaits au dénominateur, on obtient : $\frac{\left(x+y\right)\left(2+a\right)\left(2+a\right)}{\left(a+2\right)\left(a+2\right)\left(x+y\right)}=1$, car tous les facteurs se simplifient deux à deux.

La factorisation permet aussi l'addition de certaines expressions algébriques qui se présentent sous forme de fractions. Rappelez-vous que pour additionner des fractions ordinaires, elles doivent avoir le même dénominateur.

Il en est de même pour les expressions algébriques ayant un dénominateur. Pour pouvoir les additionner, elles doivent avoir le même dénominateur. La somme est alors une fraction. Son numérateur est la somme des numérateurs et son dénominateur, le dénominateur commun.

EXEMPLE 1 :

$$\frac{2a}{b}+\frac{3a}{b}$$

Comme les deux expressions ont le même dénominateur, on additionne les numérateurs et on garde le même dénominateur : $\frac{2a}{b}+\frac{3a}{b}=\frac{2a+3a}{b}=\frac{5a}{b}$.

Si, au départ, les dénominateurs ne sont pas identiques, on peut obtenir le même dénominateur en multipliant par une même quantité le numérateur et le dénominateur des fractions.

EXEMPLE 2 :

$$\frac{2a}{b}+\frac{5a}{bc}$$

Les dénominateurs ne sont pas identiques mais, en multipliant le dénominateur de la première fraction par c, on obtiendra le même dénominateur. Pour ne pas changer la valeur de la première fraction, on multipliera son numérateur et son dénominateur par c (ce qui revient à multiplier la fraction par 1).

$$\frac{2a}{b}+\frac{5a}{bc}=\frac{2ac}{bc}+\frac{5a}{bc}=\frac{2ac+5a}{bc}.$$

EXEMPLE 3 :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

Dans cet exemple, le dénominateur commun sera bd. Pour l'obtenir, on multiplie le numérateur et le dénominateur de la première fraction par d et les deux termes de la deuxième par b.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Attention, il n'y a pas de simplification possible dans ce résultat, car le numérateur est une somme de termes et non un produit de facteurs.

EXEMPLE 4 :

$$\frac{3x+4}{x^2-5x+6}+\frac{2}{x-3}$$

C'est dans ce genre d'exemple que la factorisation devient nécessaire.

$$\begin{aligned}
\frac{3x+4}{x^2-5x+6}+\frac{2}{x-3} &= \frac{3x+4}{(x-3)(x-2)}+\frac{2}{(x-3)} \\
&= \frac{3x+4}{(x-3)(x-2)}+\frac{2(x-2)}{(x-3)(x-2)} \\
&= \frac{3x+4+2(x-2)}{(x-3)(x-2)} \\
&= \frac{3x+4+2x-4}{(x-3)(x-2)} \\
&= \frac{5x}{(x-3)(x-2)}
\end{aligned}$$

EXEMPLE 5 :

$$5+\frac{3}{x-2}$$

$$\begin{aligned}
5+\frac{3}{x-2} &= \frac{5}{1}+\frac{3}{x-2} \\
&= \frac{5(x-2)}{1(x-2)}+\frac{3}{x-2} = \frac{5x-10+3}{x-2} = \frac{5x-7}{x-2}
\end{aligned}$$

Étant donné que la factorisation est une opération qui ne s'effectue pas toujours de la même façon selon la forme des trinômes à factoriser, voici une procédure que vous pouvez utiliser quand vous avez un problème de ce genre à résoudre.

1. La première chose à faire est de toujours regarder s'il y a un ou des facteurs communs à chacun des termes du polynôme.
   a) Si oui, faites une mise en évidence simple d'abord.
   b) Si non (ou après avoir fait cette première mise en évidence), déterminez le nombre de termes du polynôme ou dans la parenthèse.
2. Selon le nombre de termes déterminés :
   a) S'il y a deux termes, vérifiez si c'est un cas de différence de carrés (deux carrés séparés par un signe moins).
   b) S'il y a trois termes, vérifiez si le coefficient du premier terme est 1. Dans ce cas, vérifiez si toutes les conditions sont remplies pour pouvoir utiliser le cas $x^2+pxy+qy^2$.

c) S'il y a trois termes, mais que le premier terme n'a pas 1 comme coefficient, vérifiez si c'est un cas de trinôme carré parfait.

d) S'il y a 4 termes ou plus, vérifiez s'il est possible de les séparer en deux parties avec un facteur commun dans chacune des parties et regardez si l'on peut factoriser par double mise en évidence.

NOTE : Faites les exercices de la section 2 dans le *Recueil d'activités pratiques* avant de continuer la lecture.

Section 3 : les exposants et les logarithmes

Le domaine de la finance utilise à profusion des formules mathématiques contenant des exposants et des logarithmes. C'est le cas, par exemple, de la formule permettant de calculer la valeur finale (FV) d'un montant (PV) placé à intérêt composé, à un taux (i) pendant N années, avec capitalisation annuelle :

$$FV = PV(1+i)^N$$

C'est le cas également de la formule utilisée pour calculer la valeur finale (FV) d'un montant (PV) placé à un taux (i) pendant N années alors que la capitalisation se fait m fois par année :

$$FV = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mN}$$

Cette section sur les exposants[4] et les logarithmes vous aidera à mieux comprendre et à calculer les formules contenant ce type d'expressions.

Les exposants

Vous connaissez sans doute déjà la signification d'une expression comme 2^4 ainsi que le résultat de cette opération : $2^4 = 16$. Dans cet exemple, 4 est un *exposant*, 2 est la *base* et 2^4 est appelé la 4e *puissance* de 2. De façon plus générale, si on a :

$$b^e = p$$

4. Les notions de base sur les exposants vous ont été présentées à la section 6 du module 1. Cette partie est un rappel de la notion d'exposant et de ses propriétés mais, surtout, une préparation à la compréhension des logarithmes.

b est appelé une base, e un exposant et p ou b^e, une puissance.

La base peut être un nombre réel quelconque à l'exclusion de 0. La façon d'obtenir la valeur de p diffère selon la nature de l'exposant. Cinq cas peuvent se présenter.

– Si l'exposant est un nombre entier positif, alors p est le produit de e facteurs b. Dans ce cas, on dit que p est une puissance entière positive de b.

EXEMPLES :

$$b^e = \underbrace{b \times b \times b \times .... \times b}_{e \quad fois}$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$

– Si l'exposant est égal à 0, alors $p = 1$, quelle que soit la valeur de $b (b \neq 0)$.

EXEMPLES :

$$2^0 = 1$$

$$\left(-\frac{3}{8}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{a^{17}}\right)^0 = 1$$

– Si l'exposant est un entier négatif, (par exemple $e = -n$, où n est un entier positif), alors p est le produit de n facteurs $\frac{1}{b}$. On peut dire aussi que p est l'inverse de b^n. Dans ce cas, on dit que p est une puissance entière de b.

EXEMPLES :

$$b^{-n} = \underbrace{\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}\right)....\left(\frac{1}{b}\right)}_{n \quad fois} = \frac{1}{b^n}$$

$$2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}$$

$$\frac{1}{3^{-2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$$

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{-n} = \left(\frac{d}{c}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{1}\right)^{n} = b^n$$

$$\frac{1}{b^{-n}} = b^n$$

– Si l'exposant est une fraction positive, (par exemple $e = \frac{c}{d}$), alors p se calcule à l'aide des radicaux. Dans ce cas, le dénominateur de l'exposant est l'indice du radical. Le reste de l'expression est la quantité qui doit apparaître sous le radical (on appelle cette quantité le radicande).

EXEMPLES :

$$b^{\frac{c}{d}} = \sqrt[d]{b^c}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

– Si l'exposant est une fraction négative, on applique successivement les deux définitions précédentes.

EXEMPLE :

$$8^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$$

Les propriétés des exposants

Les opérations, simplifications et transformations des puissances ne se font pas de la même manière que celles des nombres qui ne sont pas affectés par des exposants. Voici quelques propriétés qui seront fort utiles pour simplifier ou transformer certaines expressions contenant des exposants. Les propriétés ne seront pas démontrées, mais illustrées par des exemples numériques.

Propriété 1

Le produit de deux puissances d'une même base est une puissance de la même base dont l'exposant est la somme des exposants.

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

On s'intéresse ici à la multiplication de deux puissances d'une même base. Par exemple : $(2^4)(2^5) = (16)(32) = 512 = 2^9$. On remarque que le résultat est une autre puissance de la même base et que l'exposant est la somme des deux exposants des puissances multipliées.

Si on généralise :

$$\left(a^m\right)\left(a^n\right)=\underbrace{a\times a\times a\times....\times a}_{m\quad fois}\times\underbrace{a\times a\times a\times....\times a}_{n\quad fois}=\underbrace{a\times a\times a\times....\times a}_{m+n\quad fois}=a^{m+n}$$

EXEMPLES :

$$a^5\times a^3\times a^{-2}=a^{5+3-2}=a^6$$
$$\left(e^{2t}\right)\left(e^{4t}\right)=e^{2t+4t}=e^{6t}$$
$$\left(3a^5b^k\right)\left(a^{\frac{2}{3}}b^4\right)=3a^{5+\frac{2}{3}}b^{k+4}=3a^{\frac{17}{3}}b^{k+4}$$

Propriété 2

Le quotient de deux puissances d'une même base est une puissance de la même base dont l'exposant est la différence des exposants (l'exposant du numérateur moins celui du dénominateur).

$$\boxed{a^m\div a^n=a^{m-n}}$$

Examinons la division de deux puissances d'une même base. Par exemple :

$$\frac{2^7}{2^3}=\frac{128}{8}=16=2^4$$

On remarque que le résultat est une autre puissance de la même base et que l'exposant est la différence des deux exposants des puissances divisées (celui du numérateur moins celui du dénominateur).

$$\frac{2^4}{2^6}=\frac{16}{64}=0{,}25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=2^{-2}$$

Encore ici, l'exposant du quotient est la différence des exposants.

Si on généralise, et si $m>n$:

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{\underbrace{a\times a\times a\times....\times a}_{m\quad fois}}{\underbrace{a\times a\times a\times....\times a}_{n\quad fois}}=\underbrace{a\times a\times a\times....\times a}_{m-n\quad fois}=a^{m-n}\text{ (car } n \text{ facteurs } a \text{ se simplifient)}$$

On comprend mieux maintenant pourquoi une base affectée de l'exposant 0 donne 1 comme résultat. En effet, on sait que tout nombre (sauf 0) divisé par lui-même donne 1 comme résultat. Alors, $\frac{a^n}{a^n}=1$, mais, selon la deuxième propriété des exposants, $\frac{a^n}{a^n}=a^{n-n}=a^0$. Donc $a^0=1$.

EXEMPLES :

$$\left(a^5\right) \div \left(a^{-3}\right) = a^{5-(-3)} = a^{5+3} = a^8$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{8x} \div \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8x-3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{5x}$$

$\dfrac{k^{2a}}{k^b h} = k^{2a-b}h^{0-1} = k^{2a-b}h^{-1}$. On peut accepter aussi $\dfrac{k^{2a-b}}{h}$.

Propriété 3 :

Quand on élève une puissance à une autre puissance, on obtient une puissance de la même base dont l'exposant est le produit des exposants.

$$\boxed{\left(b^m\right)^n = b^{mn}}$$

Voyons comment on peut élever une puissance à une autre puissance.

$$\left(2^3\right)^2 = (8)^2 = 64 = 2^6 = 2^{3\times 2}$$

On remarque que le résultat est une autre puissance de la même base et que l'exposant est le produit des deux exposants.

Si on généralise :

$$\left(b^m\right)^n = \underbrace{\left(b^m\right)\left(b^m\right)\left(b^m\right)....\left(b^m\right)}_{n \quad fois} = b^{\overbrace{m+m+m+...+m}^{n \quad fois}} = b^{mn}$$

EXEMPLES :

$$\left(a^{-3}\right)^{-5} = a^{(-3)(-5)} = a^{15}$$

$$\left(3^{2m}\right)^{4p} = 3^{(2m)(4p)} = 3^{8mp}$$

$$\left(4^{75}\right)\left(2^{40}\right) = \left(\left(2^2\right)^{75}\right)\left(2^{40}\right) = \left(2^{150}\right)\left(2^{40}\right) = 2^{190}$$

$$\sqrt{a^{100}} = \left(a^{100}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{100\times\frac{1}{2}} = a^{50}$$

Remarque : Il ne faut pas confondre le cas où on élève une puissance à une autre puissance et le cas où c'est l'exposant que l'on élève à une puissance :

$\left(5^2\right)^3 = 5^6 = 15\,625$. Ici c'est la puissance qui est élevée à la puissance 3.

$5^{2^3} = 5^8 = 390\,625$. Dans ce cas, c'est l'exposant qui est élevé à la puissance 3.

Propriété 4

Pour élever un produit de facteurs à une puissance, on élève à cette puissance chacun des facteurs.

$$\boxed{\left(abc \ldots z\right)^m = a^m b^m c^m \ldots z^m}$$

C'est maintenant un produit de facteurs que l'on veut élever à une puissance.

$\left(2 \times 5 \times 7\right)^2 = 70^2 = 4\,900$. Par ailleurs, $2^2 \times 5^2 \times 7^2 = 4 \times 25 \times 49 = 4\,900$ aussi.

On remarque que le résultat est le même que l'on fasse le produit d'abord et qu'on élève ensuite à la puissance ou que l'on élève à la puissance chacun des facteurs pour multiplier ensuite.

Si on généralise :

$$(abc)^m = \underbrace{(abc)(abc)(abc)\ldots.(abc)} = \underbrace{(a)(a)(a)\ldots(a)} \times \underbrace{(b)(b)(b)\ldots.(b)} \times \underbrace{(c)(c)(c)\ldots(c)} = a^m \times b^m \times c^m$$

EXEMPLES :

$$\left(ab^3c^{-2}d^{\frac{3}{2}}\right)^4 = a^4b^{12}c^{-8}d^6$$

$$\left(2^x 3^{2y}\right)^3 = 2^{3x}3^{6y}$$

Propriété 5

Pour élever une fraction à une puissance, on élève à cette puissance le numérateur et le dénominateur.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}}$$

En effet, on peut déduire cette propriété des autres propriétés des exposants :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(ab^{-1}\right)^m = a^m b^{(-1)m} = a^m b^{-m} = \frac{a^m}{b^m}$$

EXEMPLES :

$$\left(\frac{a^4}{3^m}\right)^p = \frac{a^{4p}}{3^{mp}}$$

$$\left(\frac{x^{-2}}{y^3}\right)^{-5} = \frac{\left(x^{-2}\right)^{-5}}{\left(y^3\right)^{-5}} = \frac{x^{10}}{y^{-15}} = x^{10}y^{15}$$

À ces cinq propriétés s'ajoute le corollaire suivant : si deux puissances d'une même base sont égales, alors les exposants sont égaux.

$$\left(a^n = a^x\right) \Rightarrow (n = x)$$

EXEMPLE :

Quelle est la valeur de x si $64 = 2^x$?

Comme $64 = 2^6$, on a $2^6 = 2^x$, ce qui entraîne que $6 = x$.

Il est important de se rappeler qu'il n'existe pas de propriété des exposants qui permette de simplifier rapidement une somme (ou une différence) affectée d'un exposant, par exemple $\left(x+y\right)^n$. Il faut surtout résister à la tentation de distribuer l'exposant sur chacun des termes comme on le fait pour chacun des facteurs d'un produit.

Les logarithmes

Logarithme! Voilà un mot bien intrigant pour quelqu'un qui n'en a jamais entendu parler. C'est aussi un mot qui rappellera de mauvais souvenirs à certains. Et pourtant, l'invention des logarithmes est l'une de celles qui a le plus contribué au développement du calcul et à la progression de la science, notamment en astronomie. Les savants d'autrefois, qui n'avaient pas la chance d'avoir les calculatrices et les ordinateurs dont nous nous servons aujourd'hui, utilisaient les logarithmes pour effectuer des calculs sur de très grands nombres. Pour bien comprendre les logarithmes, il faut d'abord saisir l'idée fondamentale suivante : *le logarithme est un exposant*.

On comprend alors que les logarithmes peuvent simplifier les calculs. Comme on vient tout juste de le voir, une multiplication de puissances se calcule par une addition d'exposants, une division de puissances par une soustraction d'exposants, une exponentiation par une multiplication. Comme les additions et les soustractions sont plus faciles et moins longues à effectuer que les multiplications et les divisions, les calculs sont plus simples avec les exposants ou avec les logarithmes, qui sont des exposants.

Pour définir une puissance, il fallait connaître la base de cette puissance. Il en est de même pour le logarithme : il doit être défini par rapport à une base.

$\log_b N$

L'expression précédente se lit : le logarithme de N dans la base b. Le logarithme d'un nombre (N) dans une base donnée (b), c'est l'exposant qu'on doit donner à la base (b) pour obtenir ce nombre (N). Il faut toutefois préciser que le logarithme n'est défini que pour les nombres (N) strictement positifs et pour les bases (b) strictement positives et différentes de 1.

EXEMPLE 1 :

le logarithme de 128 dans la base 2 est 7, car 7 est l'exposant que l'on doit donner à la base (2) pour obtenir le nombre (128). On écrit $\log_2 128 = 7$.

EXEMPLE 2 :

$\log_{10} 1\,000\,000$ se lit le logarithme de un million dans la base 10. Sa valeur est 6, car $1\,000\,000 = 10^6$.

EXEMPLE 3 :

$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, car $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

EXEMPLE 4 :

$\log_{10} 0{,}001 = \log_{10} \frac{1}{1000} = \log_{10} \frac{1}{10^3} = \log_{10} 10^{-3} = -3$, car – 3 est l'exposant qu'il faut donner à 10 pour obtenir 10^{-3}.

Souvent, on se sert du corollaire des exposants, soit $\left(a^n = a^x\right) \Rightarrow (n = x)$, pour trouver un logarithme.

EXEMPLE :

Trouver la valeur de $\log_4 32$.

SOLUTION

Identifions par x la valeur de ce logarithme : $\log_4 32 = x$. La variable x représente donc l'exposant qu'il faut donner à 4 pour obtenir 32 : $4^x = 32$

Comme 4 et 32 sont deux puissances de 2, on peut écrire : $\left(2^2\right)^x = 2^5$

Par la propriété 3 des exposants on obtient : $2^{2x} = 2^5$
Et par le corollaire des exposants $\left(a^n = a^x\right) \Rightarrow (n = x)$: $2x = 5$

La seule valeur possible pour x est donc 2,5.

Plus formellement, le logarithme se définit de la façon suivante :

$(\log_b N = e) \Leftrightarrow (b^e = N)$, avec $N > 0$, $b > 0$ et $b \neq 1$

Dans cette définition, b et N doivent être positifs, alors que e peut très bien être négatif, positif ou nul.

On utilise fréquemment cette définition pour passer de la première forme (logarithmique) à la deuxième (exponentielle) dans la résolution de problèmes.

EXEMPLE :

Trouvons la valeur de b, si $\log_b 25 = 2$.

SOLUTION

En transformant l'expression à l'aide de la définition formelle du logarithme, on obtient $b^2 = 25$ et donc $b = 5$. Notez que même si $(-5)^2 = 25$, – 5 ne peut être retenu comme base, car une base doit être positive.

Certaines bases sont utilisées beaucoup plus souvent que d'autres. La base 10 est l'une de celles-là. Elle est tellement « populaire[5] » que l'on a convenu de ne pas indiquer la base lorsque celle-ci est 10. C'est pour simplifier l'utilisation et l'écriture qu'il en est ainsi.

Log 100 signifie $\log_{10} 100$. Donc, log 100 = 2.

Il existe une autre base très utilisée, surtout en sciences, et c'est la base e. Le nombre e est approximativement égal à 2,71828. Les logarithmes qui utilisent cette base sont appelés logarithmes naturels et sont notés par ln. Ainsi, ln 2 signifie $\log_e 2$.

Enfin, voici deux logarithmes un peu particuliers, en ce sens qu'ils ne dépendent pas de la valeur de la base :

- le logarithme de 1 : $\log_b 1 = 0$; en effet, quelle que soit la valeur de b, $b^0 = 1$;
- le logarithme de la base b : $\log_b b = 1$; quelle que soit la valeur de b , $b^1 = b$.

Les propriétés des logarithmes

Comme pour les exposants, il existe un certain nombre de propriétés qui facilitent la transformation et la simplification des expressions contenant des logarithmes.

5. L'échelle de Richter, qui classe les tremblements de terre selon leur magnitude, est un exemple d'échelle logarithmique de base 10. Un tremblement de terre de magnitude 2 est 10 fois plus fort qu'un de magnitude 1 alors qu'un tremblement de terre de magnitude 4 est 1 000 fois plus intense que celui de magnitude 1.

Propriété 1

Le logarithme d'un produit dans une base donnée est égal à la somme des logarithmes, dans la même base, de chacun des facteurs.

$$\boxed{\log_b MN = \log_b M + \log_b N}$$

On s'intéresse ici au logarithme d'un produit. Pour une base donnée, considérons le logarithme de deux nombres et le logarithme de leur produit.

$\log_2 8 = 3$	$\log_2 16 = 4$	$\log_2(8\times 16) = \log_2 128 = 7$
$\log_3 27 = 3$	$\log_3 9 = 2$	$\log_3(27\times 9) = \log_3 243 = 5$
$\log 0{,}01 = -2$	$\log 0{,}01 = -2 \quad \log 0{,}001 = -3$	$\log(0{,}01\times 0{,}001) = \log 0{,}00001 = -5$

On constate que, dans chacun des cas, le logarithme du produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs que l'on a multipliés. On peut démontrer que cette propriété fonctionne quels que soient les facteurs et quelle que soit la base.

EXEMPLES :

$$\log_5(625\times 125) = \log_5 625 + \log_5 125 = 4 + 3 = 7$$

$$\log(abc) = \log a + \log b + \log c$$

Comme la propriété est constituée d'une égalité, elle fonctionne dans les deux sens : $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$. Portez toutefois une attention spéciale aux bases des logarithmes, lesquelles doivent être dans la même base.

EXEMPLE :

$$\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6(9\times 4) = \log_6 36 = 2$$

La raison pour laquelle $\log_5 10 + \log_2 10$ ne peut être transformé en un seul logarithme à l'aide de cette propriété est que les bases sont différentes.

Propriété 2

Le logarithme d'un quotient dans une base donnée est égal au logarithme du numérateur (dans cette base) moins celui du dénominateur (dans la même base).

$$\boxed{\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N}$$

On s'intéresse maintenant au logarithme d'un quotient. Pour une base donnée, considérons le logarithme de deux nombres et le logarithme de leur quotient.

$$\log_2 128 = 7 \qquad \log_2 16 = 4 \qquad \log_2\left(\frac{128}{16}\right) = \log_2 8 = 3$$

$$\log_3 81 = 4 \qquad \log_3 27 = 3 \qquad \log_3\left(\frac{81}{27}\right) = \log_3 3 = 1$$

$$\log 100 = 2 \qquad \log 0{,}001 = -3 \qquad \log\left(\frac{100}{0{,}001}\right) = \log 10\ 000 = 5$$

On constate que, dans chacun des cas, le logarithme du quotient est égal à la différence des logarithmes du numérateur et du dénominateur. On peut démontrer que cette propriété fonctionne quels que soient les termes de la fraction et quelle que soit la base.

EXEMPLES :

$$\log_5(625 \div 125) = \log_5 625 - \log_5 125 = 4 - 3 = 1$$

$$\log\left(\frac{ab}{c}\right) = \log ab - \log c = \log a + \log b - \log c$$

Comme la propriété est constituée d'une égalité, elle fonctionne dans les deux sens :

$\log_a M - \log_a N = \log_a\left(\frac{M}{N}\right)$. Portez une attention spéciale aux bases des logarithmes : les deux logarithmes doivent être dans la même base.

EXEMPLE :

$$\log_5 1\,250 - \log_5 10 = \log_5\left(\frac{1\,250}{10}\right) = \log_5 125 = 3$$

On voit que $\log_5 10 - \log_2 10$ ne peut être transformé en un seul logarithme à l'aide de cette propriété, car les bases sont différentes.

Propriété 3

Le logarithme d'une puissance dans une base donnée est égal à l'exposant multiplié par le logarithme du nombre dans cette même base.

$$\boxed{\log_b M^a = a\log_b M}$$

Cette propriété concerne le logarithme d'une puissance. Comme une puissance est composée d'une base et d'un exposant, il ne faudra pas confondre la base de la puissance (M) et celle du logarithme (b). Pour éviter toute confusion dans cette explication, nous allons parler d'un nombre affecté d'un exposant et le mot « base » sera réservé pour la base du logarithme.

$\log_2 8 = 3$ et $\log_2(8)^2 = \log_2 64 = 6$

$\log_3 9 = 2$ et $\log_3(9)^3 = log_3 729 = 6$

$\log 0{,}01 = -2$ et $\log(0{,}01)^4 = \log 0{,}000\ 000\ 01 = -8$

Si on compare le logarithme du nombre et le logarithme de la puissance, on constate que, dans chacun des cas, le logarithme de la puissance est égal à l'exposant multiplié par le logarithme du nombre. On peut démontrer que cette propriété fonctionne quel que soit l'exposant et quelle que soit la base.

EXEMPLES :

$\log_5(25)^3 = 3\log_5 25 = 3(2) = 6$

$\log(100)^a = a\log\ 100 = a(2) = 2a$

$\ln\sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$

EXEMPLE :

Calculez la valeur de $\log_b\ a^{99}$ en sachant que $\log_b\ a = 5$.

SOLUTION :

$\log_b\ a^{99} = 99\ \log_b\ a = 99(5) = 495$

Comme les autres propriétés, celle-ci est une égalité et peut être utilisée dans les deux sens.

EXEMPLE :

Calculez m $\log_b y = 5$ et $\log_b y^m = 20$.

SOLUTION :

Comme m $\log_b y = \log_b y^m$, en remplaçant les expressions par leur valeur, on obtient $m(5) = 20$; par conséquent, la seule valeur possible pour m est 4.

Propriété 4

On peut changer la base d'un logarithme en divisant le logarithme du nombre dans la nouvelle base par le logarithme de la première base dans la deuxième.

$$\boxed{\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}}$$

Cette propriété est aussi appelée le *changement de base*.

Examinons les logarithmes suivants :

$\log_8 512 = 3$	$\log_2 512 = 9$	et	$\log_2 8 = 3$
$\log_{1000} 1\,000\,000 = 2$	$\log 1\,000\,000 = 6$	et	$\log 1\,000 = 3$
$\log_9 729 = 3$	$\log_3 729 = 6$	et	$\log_3 9 = 2$

Dans chaque cas, on a calculé le logarithme d'un nombre dans une certaine base. Ensuite, on a calculé le logarithme du même nombre dans une autre base puis le logarithme de la première base dans la deuxième base. On constate que le premier logarithme est égal au quotient des deux autres. On peut démontrer que cette propriété fonctionne quels que soient les nombres et les bases.

Le résultat obtenu dans cette propriété est le quotient de deux logarithmes et non le logarithme d'un quotient : $\left(\frac{\log_a M}{\log_a b} \neq \log_a \frac{M}{b}\right)$. Il faut donc effectuer la division des deux logarithmes et non pas utiliser la propriété 2 mentionnée plus haut qui s'applique uniquement au logarithme d'un quotient.

EXEMPLES :

$$\log_4 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 4} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{5}{3}$$

$$\log_{25}\left(\frac{1}{125}\right) = \frac{\log_5\left(\frac{1}{125}\right)}{\log_5 25} = \frac{-3}{2}$$

$$\log_{0,001}\sqrt{100000}=\frac{\log\sqrt{100000}}{\log 0,001}=\frac{\log 100000^{\frac{1}{2}}}{\log 0,001}=\frac{\frac{1}{2}\log 100000}{\log 0,001}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)5}{-3}=\frac{\frac{5}{2}}{-3}=-\frac{5}{6}$$

Les logarithmes et la calculatrice

Dans les exemples et exercices précédents, il était généralement possible de déterminer la valeur des logarithmes utilisés parce qu'ils correspondaient à des puissances facilement identifiables. Dans la plupart des applications, et c'est particulièrement le cas en administration, les exposants sont habituellement des nombres décimaux que l'on arrondit avec la précision désirée. Pour effectuer ces calculs à partir des nombres décimaux, on doit utiliser les calculatrices qui possèdent les fonctions se rapportant aux logarithmes. Auparavant, on devait faire des recherches complexes dans des tables imposantes, mais, heureusement, cette époque est révolue.

La plupart des calculatrices ont deux fonctions logarithmiques : « $\log$ » et « $\ln$ ». On aura reconnu les logarithmes dans la base 10 et ceux dans la base e . Comme on doit souvent calculer des logarithmes dans d'autres bases, la quatrième propriété des logarithmes montre comment changer de base : on peut ainsi revenir à l'une des deux bases présentes sur la calculatrice.

Selon le modèle que vous possédez, il y a deux façons de chercher un logarithme dans la base 10 à l'aide de la calculatrice. Avec certaines calculatrices, on doit d'abord écrire le nombre dont on cherche le logarithme et, ensuite, enfoncer la touche « log ». Souvent, cette touche est associée à celle de la seconde fonction. Avec d'autres modèles (c'est le cas des calculatrices à affichage graphique notamment), on enfonce d'abord la touche « log » et on écrit ensuite le nombre dont on cherche le logarithme. Vérifiez sur le modèle que vous possédez laquelle de ces façons fonctionne en prenant comme exemple log 100, sachant que la valeur de ce logarithme est 2.

Il est donc facile de déterminer n'importe quel logarithme dans la base 10 en procédant de la même façon. Par exemple, log 5 $\approx$ 0,69897.

Pour toutes les autres bases, on fait simplement un changement de base. On ramène le logarithme à un quotient de deux logarithmes en base 10 à l'aide de la quatrième propriété. Par exemple :

$$\log_5 28=\frac{\log 28}{\log 5}\approx\frac{1,44715}{0,69897}\approx 2,070415$$

On aurait obtenu le même résultat en utilisant la base e au lieu de la base 10.

$$\log_5 28=\frac{\ln 28}{\ln 5}\approx\frac{3,3322045}{1,6094379}\approx 2,070415$$

Si on connaît le logarithme d'un nombre dans la base 10, il est facile de retrouver ce nombre. En effet, comme ce logarithme est l'exposant qu'il faut donner à la base pour obtenir le nombre, on n'a qu'à effectuer cette opération à l'aide de la calculatrice.

Par exemple, si $\log x = 1{,}69897$, alors $x = 10^{1{,}69897} \approx 50$.

Les logarithmes dans la résolution des équations exponentielles

Les logarithmes sont utilisés notamment pour résoudre des équations exponentielles, des équations où l'exposant n'est pas connu et pour lesquelles on doit justement déterminer la valeur de l'exposant. Prenons l'exemple de l'équation exponentielle $2^x = 7$. La définition du logarithme permet de transformer cette équation de manière à la résoudre. En effet, dans l'équation, x est l'exposant que l'on doit donner à 2 pour obtenir 7. Donc x est le logarithme de 7 dans la base 2 : $x = \log_2 7$.

Par la suite, on change la base pour se ramener en base 10 et utiliser la calculatrice.

$$x = \log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} \approx \frac{0{,}845098}{0{,}301029} \approx 2{,}80735$$

Parfois, il est nécessaire d'effectuer certaines transformations avant d'utiliser la définition du logarithme.

EXEMPLE :

Soit l'équation exponentielle 5($5(3^x)+4=14$.

On doit d'abord soustraire 4 à chaque terme de l'équation. On obtient : $5(3^x)=10$.

On divise ensuite les deux termes par 5 et on obtient la forme désirée, soit $3^x = 2$.

On constate maintenant que x est l'exposant qu'on doit donner à 3 pour obtenir 2.

$$x = \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} \approx \frac{0{,}30103}{0{,}47712} \approx 0{,}63093$$

Voici une première application financière de l'utilisation du logarithme dans la résolution des équations exponentielles. La formule permettant de calculer la valeur finale (FV) d'un montant (PV) placé à intérêt composé, à un taux (i), pendant N années, avec capitalisation annuelle est :

$$FV = PV(1+i)^N$$

On voudrait connaître le temps nécessaire pour qu'un montant de 1 000 $ placé à 5 % prenne une valeur finale égale à 1 500 $. En remplaçant chacune des variables de la formule par sa valeur, on obtient :

$$1\,500\ \$ = 1\ 000\$(1+0{,}05)^N$$

En divisant les deux membres de l'équation par 1 000 et en effectuant l'addition à l'intérieur de la parenthèse, l'équation devient :

$$1{,}5 = 1{,}05^N$$

Comme N est l'exposant qu'il faut donner à 1,05 pour obtenir 1,5, on utilise le logarithme :

$$N = \log_{1,05} 1{,}5 = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}05} \approx \frac{0{,}17609}{0{,}021189} \approx 8{,}31$$

Voici une seconde application financière de l'utilisation du logarithme dans la résolution des équations exponentielles. Il existe une formule pour calculer la valeur finale (FV) d'un montant (PV) placé à un taux (i) pendant N années alors que la capitalisation se fait m fois par année.

$$FV = PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mN}$$

Un montant de 8 000 \$ est placé à un intérêt composé de 6 % et la capitalisation se fait 4 fois par année. Dans combien de temps la valeur finale aura-t-elle atteint 10 000 \$?

En remplaçant les variables de la formule par leurs valeurs, on obtient :

$$10\,000\,\$ = 8\,000\,\$\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{4N}$$

$$\frac{10\,000\,\$}{8\,000\,\$} = \left(1+0{,}015\right)^{4N}$$

$1{,}25 = 1{,}015^{4N}$. Par la définition du logarithme, on obtient :

$$4N = \log_{1,015}\left(1{,}25\right) = \frac{\log 1{,}25}{\log 1{,}015} \approx \frac{0{,}096910}{0{,}006466} \approx 14{,}9875$$

Le résultat obtenu est la valeur de $4N$. Puisque c'est N qu'il faut connaître, il suffit de diviser le terme par 4 pour obtenir le nombre d'années désiré.

$$N \approx \frac{14{,}9875}{4} \approx 3{,}74688$$

NOTE : Faites les exercices de la section 1 dans le *Recueil des activités pratiques.* Faites ensuite les exercices de révision du module dans ce même recueil.

Section 4 : les matrices

Dans cette section, nous abordons la notion de matrice, soit les différents types de matrices utilisées et les opérations qu'il est possible d'effectuer avec celles-ci. L'étude des matrices, dans le cadre du cours, servira de préparation à la résolution des systèmes d'équations complexes, objet du module 3. Mais les matrices ont aussi d'autres utilités, moins visibles celles-là : le traitement des données numériques dans les chiffriers électroniques, les transformations géométriques faites à partir de logiciels de graphisme et les transformations linéaires dans le domaine des statistiques ne sont que quelques-unes des applications du calcul matriciel.

Les matrices

Une *matrice* est un tableau de nombres. Ces nombres sont appelés des *scalaires*. Chaque ligne et chaque colonne sont complètes. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & \sqrt{2} \\ 0,5 & 100 \end{pmatrix}$$

est une matrice comportant 3 lignes et 2 colonnes. On représente les matrices à l'intérieur de parenthèses ou de crochets. Les nombres qui forment la matrice sont les éléments de la matrice. Le plus souvent, on représente une matrice par une lettre majuscule et ses éléments par la même lettre, en minuscule, accompagnée de deux indices, le premier indiquant la ligne où se trouve l'élément et le deuxième, la colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}$$

La variable A représente la matrice et la variable indicée $a_{3,2}$ représente l'élément de la troisième ligne et de la deuxième colonne de cette matrice. Par exemple si :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, la variable indicée $a2,3 = 8$ et $a3,1 = 4$.

Il est à noter que les variables indicées peuvent prendre n'importe quelle valeur, mais que les indices sont des nombres entiers positifs. Lorsque aucune ambiguïté n'est possible, on omet parfois la virgule entre les deux indices : a_{23} .

Le nombre de lignes et le nombre de colonnes d'une matrice forment la *dimension* de cette matrice. Par exemple, la matrice B suivante est de dimension 2 × 4 (lire « 2 par 4 »).

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Il arrive parfois que l'on indique la dimension d'une matrice, en indice, à droite de la variable qui la représente : $B_{2\times 4}$.

Les matrices particulières

Il existe différents types de matrices. Voici une brève liste des matrices les plus courantes :

– L'*opposée de la matrice* A , notée – A , est une autre matrice de même dimension que A et dont chacun des éléments est l'opposé de l'élément correspondant de A .

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, l'opposée de A est $-A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -0{,}1 \end{pmatrix}$.

– La *transposée* de la matrice A , notée A^T , est une autre matrice obtenue en remplaçant les lignes de A par ses colonnes.

Soit $D = \begin{pmatrix} 2{,}3 & 5 \\ 10 & 9 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. La transposée de D est $D^T = \begin{pmatrix} 2{,}3 & 10 & -2 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

– Une matrice qui a autant de lignes que de colonnes est une *matrice carrée*. Dans le cas d'une matrice carrée, on utilisera plutôt le terme « ordre » de la matrice pour indiquer le nombre de lignes qui est aussi le nombre de colonnes. La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2, car elle a 2 lignes et 2 colonnes. Les éléments $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots a_{mm}$ forment la grande diagonale de la matrice carrée A .

– Une *matrice diagonale* est une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la grande diagonale sont nuls : ($a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$). La matrice suivante est une matrice diagonale.

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- Une *matrice identité* est une matrice diagonale dont les éléments de la grande diagonale sont tous 1 : ($a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$ et $a_{ij} = 1 \text{ si } i = j$). La matrice suivante est la matrice identité d'ordre 3.

  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ La variable I est réservée pour représenter les matrices identités.

- Une *matrice triangulaire* est une matrice carrée où tous les éléments situés d'un même côté de la grande diagonale sont nuls.

  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure et $F = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, une triangulaire supérieure.

- Une matrice formée d'une seule ligne est appelée une *matrice-ligne*. Ces matrices-lignes sont aussi associées à d'autres objets mathématiques appelés vecteurs. Nous ne traiterons pas ce sujet.
- Une matrice formée d'une seule colonne est appelée *matrice-colonne*. Elle correspond également à un vecteur.
- On appelle *matrice 0* une matrice dont tous les éléments sont 0, peu importe la dimension de cette matrice.

L'égalité de matrices

Pour que deux matrices soient égales, elles doivent avoir la même dimension et tous leurs éléments correspondants doivent être égaux. De façon plus formelle, on définit l'égalité de matrices de la façon suivante :

$\left(A_{m\times n} = B_{p\times q}\right) \Leftrightarrow$ ($m = p, n = q$ et $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour $i = 1, 2, \ldots m$ et $j = 1, 2, \ldots n$ j)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ y & 5 \end{pmatrix}$. Pour que $A = B$, il faut que $x = 5$ et que $y = 4$.

Une matrice carrée est *symétrique* si elle est égale à sa transposée.

Les opérations sur les matrices

L'addition de matrices

Pour motiver ses vendeurs, un directeur des ventes note le nombre de produits écoulés par chacun de ses vendeurs. Le tableau suivant représente leurs ventes durant la première semaine du mois.

Tableau 2.2
La vente des produits A, B et C durant la première semaine du mois

Vendeurs	Produit A	Produit B	Produit C
Alice	10	4	5
Benoît	15	5	2
Caroline	12	2	8
Daniel	5	3	6

Cet autre tableau représente leurs ventes durant la deuxième semaine.

Tableau 2.3
La vente des produits A, B et C durant la deuxième semaine du mois

Vendeurs	Produit A	Produit B	Produit C
Alice	8	3	6
Benoît	12	6	3
Caroline	10	6	2
Daniel	9	0	3

Les ventes de la première semaine peuvent être représentées par la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 \\ 15 & 5 & 2 \\ 12 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

et celles de la deuxième semaine par la matrice suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 3 \\ 10 & 6 & 2 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si on veut représenter par une matrice les ventes pour les deux semaines en question, on obtiendra une matrice de même dimension dont chacun des éléments sera la somme des éléments correspondants des deux matrices. C'est de cette façon que l'on définit l'addition de matrices.

$$P + D = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 \\ 15 & 5 & 2 \\ 12 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 3 \\ 10 & 6 & 2 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+8 & 4+3 & 5+6 \\ 15+12 & 5+6 & 2+3 \\ 12+10 & 2+6 & 8+2 \\ 5+9 & 3+0 & 6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 7 & 11 \\ 27 & 11 & 5 \\ 22 & 8 & 10 \\ 14 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Plus formellement,

$$(A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}) \Leftrightarrow \qquad (c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \text{ pour } i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,m \text{ et } j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,n)$$

Soustraire une matrice B d'une matrice A équivaut à additionner A à l'opposée de la matrice B : $A - B = A + (-B)$. Si on veut représenter par une matrice les ventes de la première semaine moins les ventes de la deuxième semaine, on obtiendra une matrice de même dimension dont chacun des éléments sera la différence des éléments correspondants des deux matrices.

$$P - D = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 \\ 15 & 5 & 2 \\ 12 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -3 & -6 \\ -12 & -6 & -3 \\ -10 & -6 & -2 \\ -9 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-8 & 4-3 & 5-6 \\ 15-12 & 5-6 & 2-3 \\ 12-10 & 2-6 & 8-2 \\ 5-9 & 3-0 & 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

La multiplication d'une matrice par un scalaire

Cette opération est un peu particulière dans le sens où les deux opérandes ne sont pas de même nature. En effet, l'un est un scalaire (un nombre) et l'autre, une matrice. Le résultat de cette opération est une matrice.

Soit k un scalaire et A une matrice, le produit de la matrice A par le scalaire k, noté kA est une matrice de même dimension que A dont chacun des éléments est obtenu en multipliant par K l'élément correspondant de la matrice A.

Plus formellement, ($C_{m\times n} = kA_{m\times n}$) $\quad\Leftrightarrow\quad$ $c_{i,j} = ka_{i,j}$ pour $i = 1,\ 2,\ \ldots, m$ et $j = 1,\ 2,\ \ldots, n$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Alors $5M = 5\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 30 & -5 & 20 \\ -15 & 20 & 0 & 10 & 25 \end{pmatrix}$.

Comme l'égalité est vraie dans les deux sens, on peut « mettre un facteur en évidence » à condition qu'on le retrouve dans chacun des éléments de la matrice.

$$\begin{pmatrix} 14 & 21 \\ -49 & 35 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Comme pour les nombres, la multiplication d'une matrice par un scalaire a priorité sur l'addition de matrices.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. L'expression matricielle $3A + 5I_2$ peut se transformer en une seule matrice de la façon suivante :

$$3A + 5I_2 = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$$

Les matrices équivalentes[6]

Les matrices sont particulièrement utiles dans la résolution des systèmes d'équations, comme nous le verrons au module 3. Elles permettent, par exemple, de représenter des systèmes d'équations linéaires tel celui-ci :

$$2a + 4b + 6c = 28$$
$$3a + 2b - 4c = -5$$
$$a + b + c = 6$$

sous une forme matricielle équivalente :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 28 \\ 3 & 2 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Dans ce contexte, on appelle *matrices équivalentes* des matrices de même dimension qui représentent des systèmes d'équations ayant les mêmes solutions.

6. Les matrices équivalentes sont particulièrement utiles pour résoudre divers systèmes d'équations. Les matrices équivalentes sont largement utilisées en recherche opérationnelle et en régression. Il est donc fortement conseillé aux étudiants désirant suivre les cours *Analyse de régression* (MQT 2010) ou *Recherche opérationnelle* (MQT 2420) de bien étudier cette section. Si vous n'avez pas l'intention de suivre ces cours, la lecture de cette partie et les exercices s'y rapportant sont optionnels.

Il est possible de démontrer que l'on obtient une matrice équivalente si l'on effectue l'une ou l'autre des opérations suivantes à une matrice :

- permutation de deux lignes;
- multiplication (ou division) de tous les éléments d'une ligne par une constante différente de 0;
- addition d'une ligne à une autre ligne.

On peut combiner les deux dernières opérations et, à une ligne, additionner une autre ligne que l'on a d'abord multipliée par une constante différente de 0.

Si les matrices A et B sont équivalentes, on écrit $A \sim B$ (lire « A est équivalente à B »).

EXEMPLE 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \sim B$, car B est obtenue en multipliant la deuxième ligne de A par $-\frac{1}{2}$. $B \sim C$, car C est obtenue en remplaçant la deuxième ligne de B par la somme de la première et de la deuxième ligne de B. Enfin, on obtient D équivalente à C en multipliant la deuxième ligne de C par 2. Comme l'égalité, la relation d'équivalence de matrices est transitive, c'est-à-dire que si $A \sim B$, $B \sim C$ et que $C \sim D$, alors $A \sim D$.

EXEMPLE 2 :

Montrer que $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{L_1 \div 2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{L_2 + 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & 21 \end{pmatrix} \overset{L_2 \div 7}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 3 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A équivalente à M et possédant les propriétés suivantes :

- $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$
- Tous les autres éléments des 3 premières colonnes sont 0.

  (Une telle matrice est appelée : matrice EL ou matrice échelonnée-ligne[7])

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \div (-3) \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \times (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_3 \\ L_2 - L_3 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Toutes les conditions posées sont réalisées. Ce processus peut se réaliser avec des matrices de dimensions différentes. Quelquefois, on ne peut y arriver parce qu'un élément de la forme a_{ii} devient 0 et ne peut donc se ramener à 1 par multiplication ou division ou permutation de lignes.

L'ordre dans lequel les opérations ont été effectuées facilite l'obtention de la matrice EL.

1. Obtenir 1 pour l'élément a_{11} (en multipliant ou divisant par la constante appropriée).
2. Obtenir des 0 pour les autres éléments de la première colonne (en additionnant chacune des lignes avec la première multipliée par une constante).
3. Obtenir 1 pour l'élément a_{22}.
4. Obtenir des 0 sous cet élément.
5. Obtenir 1 pour l'élément a_{33}.

---

7. La définition donnée par de Champlain, Mathieu, Patenaude et Tessier (1996), *Lexique mathématique* (Les Éditions du Triangle d'or), est la suivante : « matrice qui répond aux quatre conditions suivantes :
   - sur chaque ligne non nulle, le premier élément non nul est 1;
   - dans la colonne du premier élément non nul d'une ligne, il n'y a, hormis cet élément, que des 0;
   - le premier élément non nul d'une ligne est toujours à droite du premier élément non nul de la ligne précédente;
   - toutes les lignes nulles, s'il y en a, sont au-dessous des lignes non nulles. »

6. Obtenir des 0 pour les autres éléments de la troisième colonne.
7. Obtenir un 0 pour l'élément a_{12}.

Le procédé est semblable même lorsque la dimension est différente.

EXEMPLE 4 :

Déterminer, si possible, une matrice EL équivalente à $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \div 2 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 3L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Comme il n'est plus possible que $a_{22} = 1$, on arrête le processus.

NOTE : Faites les exercices de la section 4 dans le *Recueil des activités pratiques* avant de continuer la lecture.

Résumé

En algèbre, les lettres de l'alphabet (français ou autres), munies ou non d'indices, sont utilisées pour représenter des quantités. Quand ces quantités gardent la même valeur, on les appelle constantes; si leur valeur change, ce sont des variables. Lorsque l'on effectue des opérations mathématiques sur des variables, des constantes, des nombres, on obtient des expressions algébriques.

Des expressions algébriques formées du produit de nombres et de variables affectées d'exposants entiers et positifs et ne contenant pas d'additions (ou de soustractions) sont appelées des monômes. Leur partie numérique est le coefficient. Les composantes d'un produit sont des facteurs. Deux monômes ayant les mêmes variables affectées des mêmes exposants et des mêmes indices, s'il y a lieu, sont des monômes ou des termes semblables. Une somme de monômes est un polynôme.

Pour multiplier des monômes, on doit multiplier leurs coefficients et additionner les exposants de leurs variables. Pour multiplier des polynômes, on multiplie chacun des termes du premier par chacun des termes du second. Lorsque l'on additionne des monômes ou des polynômes, on ne peut effectuer l'addition que des termes semblables. Dans ce cas, on additionne les coefficients et on laisse la partie contenant les variables inchangée. Soustraire deux expressions algébriques équivaut à additionner la première à l'opposée de la seconde. Diviser deux expressions algébriques équivaut à multiplier la première par l'inverse de la seconde.

Pour simplifier une fraction, le numérateur et le dénominateur doivent absolument être des produits de facteurs. La factorisation, ou décomposition en facteurs, consiste à transformer un polynôme en un produit de facteurs. On peut factoriser un polynôme par une mise en évidence simple ou par une double mise en évidence. On peut également reconnaître qu'un polynôme est une différence de carrés ou un trinôme de la forme $x^2 + pxy + qy^2$ ou, encore, un trinôme carré parfait. Il existe aussi d'autres cas. Plusieurs de ces cas peuvent se combiner.

Exposant et logarithme sont apparentés. Une base munie d'un exposant constitue une puissance de cette base. Le logarithme d'un nombre (N) dans une base donnée (b), c'est l'exposant qu'on doit donner à la base (b) pour obtenir ce nombre (N). Le logarithme n'est défini que pour les nombres (N) strictement positifs et pour les bases (b) strictement positives et différentes de 1. $\left(\log_b N = e\right) \Leftrightarrow \left(b^e = N\right)$. Pour résoudre une équation dont la variable est un exposant, on utilise la définition du logarithme.

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres appelés scalaires. La dimension d'une matrice est son nombre de lignes suivi de son nombre de colonnes. Il existe plusieurs matrices particulières : matrice 0, matrice identité, matrice-ligne, matrice-colonne, matrice carrée, matrice triangulaire, matrice diagonale, matrice identité. L'opposée d'une matrice est la matrice obtenue en changeant le signe de chacun de ses éléments. La transposée d'une matrice s'obtient en changeant les lignes en colonnes.

Deux matrices sont égales si elles sont de même dimension et si leurs éléments correspondants sont égaux. On additionne des matrices de même dimension en additionnant chacun de leurs éléments. On les soustrait en additionnant la première à l'opposée de la seconde. On multiplie une matrice par un scalaire en multipliant par ce scalaire chacun des éléments de la matrice.

Deux matrices sont équivalentes ($A \sim B$) si on peut obtenir l'une en effectuant une ou plusieurs des opérations suivantes sur l'autre :

– permutation de deux lignes.
– multiplication (ou division) de tous les éléments d'une ligne par une constante différente de 0.
– addition d'une ligne à une autre ligne.

On peut combiner les deux dernières opérations et, à une ligne, additionner une autre ligne que l'on a d'abord multipliée par une constante différente de 0.

Une matrice est échelonnée-ligne lorsque, dans les lignes non nulles, les éléments de la forme $a_{i,i}$ sont 1 et les autres éléments de la colonne sont 0.

NOTE : Il ne vous reste plus qu'à compléter le test d'autoévaluation avant de faire le test noté de ce module.