Module 1 – Langage mathématique de base

MQT 1001
Mathématiques appliquées
à la gestion

Houda Affes

UNIVERSITÉ TÉLUQ

Table des matières

Section 1 : les nombres

Établissons d'abord une distinction fondamentale entre deux termes utilisés couramment : le chiffre et le nombre. Ce sont deux mots étroitement liés malgré leur sens bien différent.

Le mot *chiffre* a une définition très claire. Un chiffre représente un symbole ou un caractère utilisé pour écrire les nombres. Nous avons tous étudié les chiffres arabes et les chiffres romains. Les Romains utilisaient les symboles *I*, *V*, *X*, *L*, *C*, *D* et *M* pour écrire leurs nombres. L'ensemble des chiffres arabes, représentés par nos symboles *0*, *1*, *2*, *3*, ..., *9*, sont utilisés dans notre système décimal.

Le concept *nombre*, quant à lui, n'a pas de définition aussi précise que le mot chiffre. Nous avons établi qu'un chiffre est un symbole pour écrire un nombre. Conséquemment, un nombre est composé de chiffres et aussi de quelques autres symboles que nous verrons au fur et à mesure[1] que cela sera nécessaire. Chaque caractère, pris individuellement, forme un nombre en lui-même. Ainsi, le nombre 8 est formé du chiffre 8.

Les chiffres formant les nombres prennent des valeurs différentes suivant leur position dans le nombre qui en résulte. Le système de numérotation de position des chiffres que nous utilisons tous les jours est le système décimal, système exprimé en base 10. Ainsi, le nombre 92 (le prix du jeu vidéo) n'a pas la même valeur que le nombre 29 (nombre de personnes en file à la caisse enregistreuse). La position des chiffres 9 et 2 diffère dans la composition des deux nombres (si le nombre de personnes en file totalisait 92 plutôt que 29, l'attente à la caisse enregistreuse mettrait davantage à l'épreuve notre patience). Les nombres formés par les chiffres 9 et 2 prennent des valeurs différentes selon la position des chiffres. Le système décimal accorde une valeur de deux unités au chiffre 2 dans le nombre 92 et lui attribue une valeur de deux dizaines dans le nombre 29.

Un nombre est l'outil mathématique utilisé pour exprimer une quantité, une mesure, une grandeur, etc. Pour de nombreuses interventions ou opérations et en raison du besoin de dénombrer, compter, comparer, quantifier, mesurer, classer, etc., la famille des nombres est fortement peuplée. Comme dans toute famille, chaque membre qui la compose a un nom et des caractéristiques qui lui sont propres. Voyons trois des membres les plus importants de cette famille : les *nombres naturels*, les *nombres entiers* et les *nombres réels*.

---

1. Les radicaux, les signes + et —, les barres de fractions, la lettre grecque π , etc.

Les nombres naturels

La famille des nombres la plus simple est le système des nombres naturels. L'ensemble des *nombres naturels* est composé de la suite infinie (les symboles « ∞ » ou « $\propto$ » sont utilisés en mathématiques pour exprimer l'infini) de nombres entiers positifs : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$. Un nombre naturel, à l'exception du 0 et du 1, peut être un nombre premier ou un nombre composé. Un *nombre premier* est tout nombre naturel supérieur à 1 et ne se divisant que par 1 et par lui-même.

L'ensemble $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...\}$ représente les nombres premiers. Un *nombre composé* se divise par 1, par lui-même et par d'autres nombres entiers. C'est un nombre naturel supérieur à 1 ayant plus de deux diviseurs entiers positifs. L'ensemble des nombres composés est $\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, ...\}$. On désigne l'ensemble des nombres naturels par le symbole « $\mathbb{N}$ ».

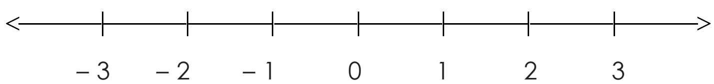
Les nombres entiers

Le paragraphe précédent fait référence à plusieurs reprises à la notion de nombre entier. L'ensemble $\{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ forme l'ensemble des *nombres entiers*. Les *nombres pairs* sont définis comme des nombres entiers divisibles par 2. L'ensemble $\{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$ est composé de nombres pairs. L'ensemble $\{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$ est formé de *nombres impairs*, c'est-à-dire de nombres entiers non divisibles par 2 ou dont le résultat de la division par 2 ne procure pas un autre nombre entier. L'addition ou la soustraction de deux nombres pairs ou de deux nombres impairs forme un nombre pair : $5+3=8$ ou $8-6=2$. La multiplication d'un nombre pair par un autre nombre pair ou par un nombre impair produira un nombre pair : $2\times2=4$ ou $2\times3=6$ (les opérations mathématiques sont étudiées à la prochaine section). L'ensemble des nombres entiers est représenté par le symbole « $\mathbb{Z}$ ». Ce symbole vient de la première lettre du mot allemand « *zahl* » qui signifie nombre.

L'ensemble des nombres entiers introduit les concepts de nombre positif et de nombre négatif. Un *nombre positif* est défini comme un nombre réel supérieur ou égal à « 0 ». Un nombre réel inférieur ou égal à « 0 » est un *nombre négatif*. Remarquez que le « 0 » fait partie autant des nombres positifs que des nombres négatifs. En se référant à la mise en situation, le coût du jeu vidéo, établi à 92 $, représente un nombre entier positif (l'ensemble des nombres entiers positifs correspond à l'ensemble des nombres naturels), alors que pour décrire la température régnant sur Québec, – 23 °C, un nombre entier négatif est utilisé.

La raison justifiant l'appartenance du « 0 » aux deux familles s'appuie sur les notions de graduation et de valeur absolue. Pour comparer des températures, des prix, des longueurs, etc., nous nous référons à la notion de graduation. La *graduation* représente chacune des divisions, résultant d'une séparation en degrés, d'un instrument de mesure. Pour parler le même langage, les instruments de mesure tels les rubans à mesurer ou les thermomètres sont gradués, c'est-à-dire divisés en degrés de même distance. La graduation entière d'une droite est présentée à la figure 1.1.

Figure 1.1
La graduation entière d'une droite



Chaque graduation représente l'emplacement d'un nombre entier. Son emplacement s'évalue par rapport à la distance qui le sépare du nombre « 0 » et à sa direction à partir du « 0 ». Quant à son emplacement, la distance entre « 3 » (ou « – 3 ») et « 0 » est 3. En ce qui concerne sa direction, le nombre « – 3 » se trouve à trois unités à gauche du nombre « 0 » et le nombre « 3 » se trouve à trois unités à droite du nombre « 0 ». La direction vers la gauche à partir du « 0 » nous présente les nombres entiers négatifs et celle vers la droite, les nombres entiers positifs. Plus le déplacement se fait vers la droite, plus les nombres augmentent. Un déplacement de plus en plus vers la gauche montre des nombres de plus en plus petits. La température de – 23 °C à Québec représente un temps plus froid et, par conséquent, un nombre plus petit qu'une lecture au thermomètre de – 12 °C. Plus le nombre s'éloigne du « 0 » vers la gauche, plus sa valeur diminue. À partir de cette graduation, la droite peut être sous-graduée en utilisant les nombres décimaux, nombres à l'étude à la section 4 du présent module.

La graduation nous explique la présence des nombres négatifs et positifs. Un nombre négatif a toujours un nombre positif comme opposé et vice-versa. La distance qui les sépare du « 0 », abstraction faite de la direction et, conséquemment, de leur signe, est la même. Un nombre est à la même distance du « 0 » que son opposé. Sans leur signe respectif, ces deux nombres ont donc la même valeur. Ces constatations font référence à la notion de « valeur absolue ». La *valeur absolue* d'un nombre réel correspond à la valeur positive de ce nombre, indépendamment de son signe. Le symbole utilisé pour exprimer un nombre réel en valeur absolue est « $|\ \ |$ ». La distance qui sépare « – 3 » du « 0 » est 3 et correspond à la même distance séparant le « 0 » du « 3 ». « $|-3|$ », exprimant le nombre – 3 en valeur absolue, correspond à 3. La théorie de la valeur absolue appuie l'égalité suivante : $|-3|=|3|=3$.

Les nombres réels

Notre système de numérotation emploie, nous venons de le constater, une infinité de nombres entiers. Mais il existe aussi d'autres nombres, non entiers ceux-là. Pour qualifier l'ensemble des nombres entiers et non entiers, les notions de nombre rationnel et de nombre irrationnel sont utilisées. Ces nombres sont obtenus soit par diverses opérations arithmétiques, comme les nombres rationnels, soit par des calculs géométriques, comme les nombres irrationnels.

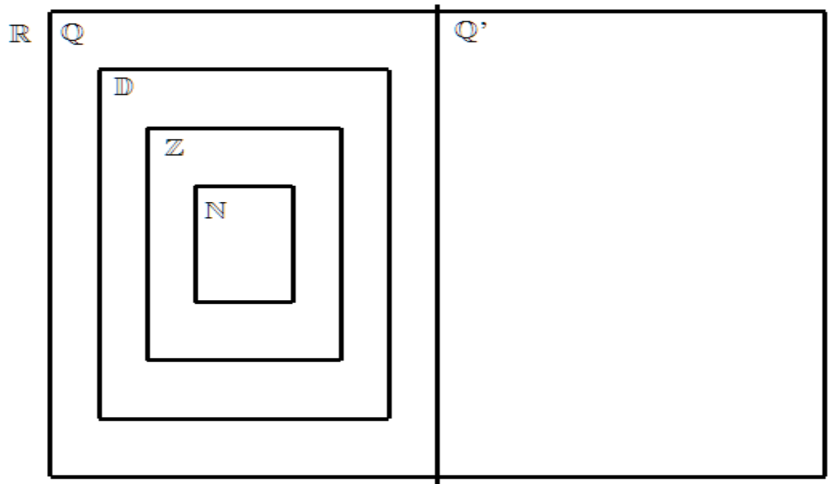
Un *nombre rationnel* provient de la division de deux nombres entiers. Le quotient est alors une suite décimale limitée ou illimitée mais périodique[2]. À titre d'exemple, 1 divisé par 2, exprimée sous forme de fraction par $\frac{1}{2}$, correspond à une suite décimale limitée, soit 0,5. Le résultat de la division de 1 par 3, dont la fraction équivalente est $\frac{1}{3}$, représente une suite décimale illimitée mais périodique (soit 0,333333333...). Une barre horizontale au-dessus du ou des chiffres périodiques exprime la suite infinie et répétitive de ces chiffres ($0,\bar{3}$). Ainsi, $\frac{1}{11} = 0,\overline{09}$, ce qui signifie que la suite de chiffres se poursuit à l'infini : $\frac{1}{11} = 0,090909...$.

Tout nombre ayant une suite décimale illimitée et non périodique se qualifie comme *nombre irrationnel*. Un nombre irrationnel ne provient pas du résultat d'une division de deux entiers. Le symbole π, utilisé pour désigner le rapport constant de la circonférence d'un cercle à son diamètre, est un nombre irrationnel puisque son développement décimal est infini et non périodique (soit 3,141592654...). Le grand ensemble des nombres rationnels et irrationnels se nomme l'ensemble des *nombres réels*. Les nombres rationnels peuvent être exprimés aussi sous forme de fractions ou de nombres décimaux, deux concepts qui font l'objet des sections 3 et 4. Le symbole « $\mathbb{R}$ » désigne l'ensemble des nombres réels, « $\mathbb{Q}$ » désigne l'ensemble des nombres rationnels et « $\mathbb{Q}'$ », l'ensemble des nombres irrationnels.

Le diagramme de la figure 1.2 illustre l'ensemble des nombres réels. L'ensemble des nombres réels regroupe, nous venons de le voir, l'ensemble des nombres rationnels et son complémentaire, l'ensemble des nombres irrationnels. Les nombres naturels, les nombres entiers et les nombres décimaux s'emboîtent dans l'ensemble des nombres rationnels.

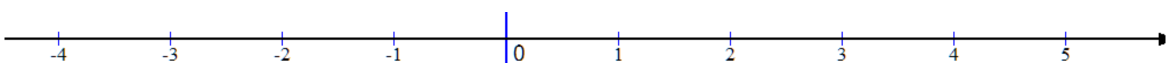
2. Une suite décimale périodique d'un nombre rationnel est une suite de chiffres qui se répètent indéfiniment dans la partie décimale de ce nombre.

Figure 1.2
L'ensemble des nombres réels

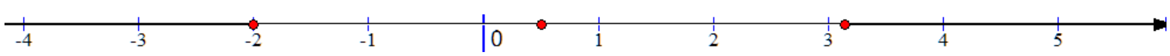


La droite numérique réelle

On représente aussi les nombres réels sur une droite. Pour indiquer que les nombres inscrits sur cette droite sont en ordre croissant, on place une flèche à la droite de cette droite. Habituellement, les nombres entiers sont indiqués par des tirets verticaux. La graduation peut être différente, mais l'espace entre deux tirets doit être la même partout.



Pour indiquer certains nombres particuliers, on place un point sur la ligne, sur un tiret ou dans l'espace entre deux tirets.



Les intervalles

On appelle intervalle un ensemble de nombres réels compris entre deux extrémités ou bornes de l'intervalle. Par exemple :

L'intervalle [3, 5] comprend tous les nombres réels compris entre 3 et 5, de même que 3 et 5. Attention, il ne contient pas seulement 3, 4 et 5, mais aussi toutes les fractions et tous les nombres irrationnels compris entre 3 et 5, comme 3,1 ou 5¾ ou π ou $\sqrt{10}$. Parce qu'il contient ses deux bornes, cet intervalle est dit fermé.

L'intervalle]– 4, – 2[est l'ensemble de tous les nombres réels compris entre – 4 et – 2, mais pas – 4 ni – 2. C'est un intervalle ouvert puisque les bornes ne font pas partie de l'intervalle, car les crochets sont tournés vers l'extérieur de l'intervalle.

L'intervalle [½, ¾[comprend tous les nombres réels compris entre ½ et ¾, incluant ½, mais pas ¾. Il est fermé à gauche et ouvert à droite. L'intervalle]– 0,1789, – 0,0211] est ouvert à gauche et fermé à droite; il contient – 0,0211, mais pas – 0,1789. Attention, dans un intervalle, c'est toujours le plus petit des deux nombres qui est placé en premier. Un ensemble comme [3, 1], ça n'existe pas.

La notation d'intervalle peut aussi être utilisée pour représenter tous les nombres plus grands ou plus petits qu'un nombre donné. On utilise alors le symbole ∞, qui signifie l'infini.

Ainsi,

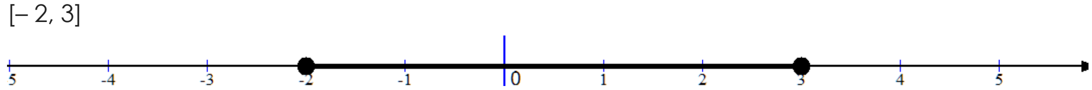
- Tous les nombres plus grand que 3 ($x > 3$) font partie de l'intervalle]3, ∞[.
- Tous les nombres plus grands ou égaux à 3 ($x \geq 3$) appartiennent à l'intervalle [3, ∞[.
- Tous les nombres plus petits que 3 ($x < 3$) sont dans l'intervalle]– ∞, 3[.
- Les nombres qui vérifient l'inéquation $x \leq 3$ forment l'intervalle]– ∞, 3].

On aura remarqué que l'intervalle est toujours ouvert du côté de l'infini. C'est normal puisque l'infini n'est pas un nombre et ne peut donc pas faire partie d'un ensemble de nombres.

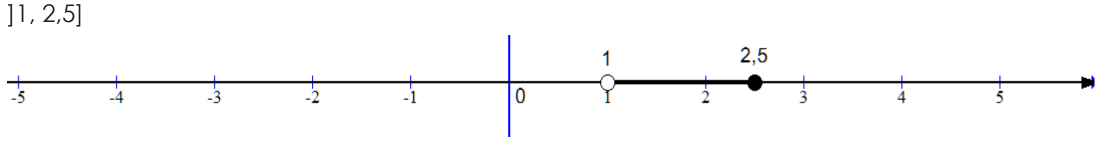
Si l'on veut représenter un intervalle sur une droite numérique, l'on placera d'abord les deux bornes de l'intervalle sur la droite. Si l'intervalle est fermé, l'on placera un point plein et s'il est ouvert, un point vide. On élargira aussi le trait entre les deux points. Si l'une des bornes va à l'infini, l'on mettra une flèche au lieu d'un point.

EXEMPLES :

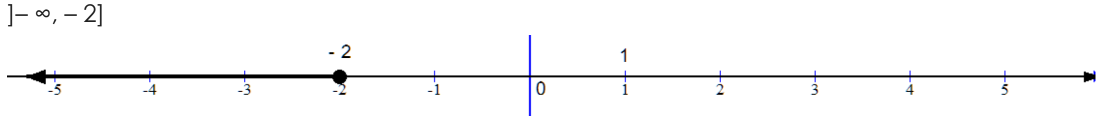
[– 2, 3]



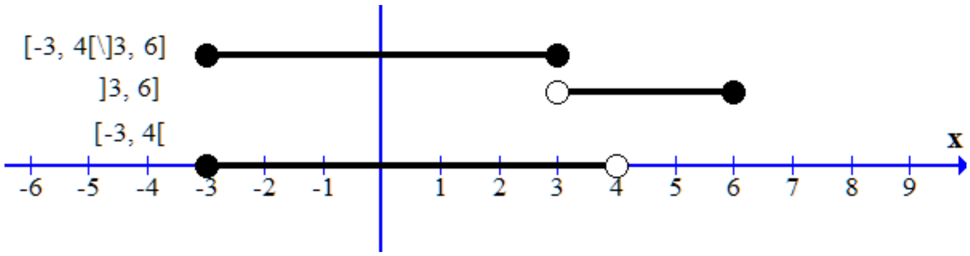
]1, 2,5]



]– ∞, – 2]



On peut aussi superposer deux intervalles pour les comparer ou effectuer certaines opérations. Par exemple : déterminez l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'intervalle [– 3, 4[, mais qui n'appartiennent pas à l'intervalle]3, 6]. Représentez votre résultat sur la droite réelle et aussi sous forme d'intervalle.



Les trois intervalles sont superposés, avec leur nom au début de la ligne.

Le trait entre les deux intervalles signifie précisément ce que la question demande :

les éléments qui sont dans le premier ensemble et qui ne sont pas dans le deuxième.

Le nombre 3 appartient au 1er ensemble, mais n'appartient pas au 2e : il est donc dans la réponse.

La réponse sous forme d'intervalle est [– 3, 3].

Voici quelques-unes des opérations que l'on peut effectuer sur les intervalles de nombres :

L'intersection (∩) de deux intervalles signifie l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à l'un et à l'autre des deux intervalles.

EXEMPLE :

]0, 5[∩]3, 6[=]3, 5[

L'**union (U)** ou réunion de deux intervalles comprend tous les nombres qui sont dans l'un ou l'autre des deux intervalles ou même dans les deux.

EXEMPLE :

]0, 5[U]3, 6[=]0, 6[

La **différence (\ )** d'intervalles est l'intervalle qui comprend les nombres qui sont dans le premier intervalle, mais pas dans le deuxième :

EXEMPLE :

]0, 5[\ ]3, 6[=]0, 3

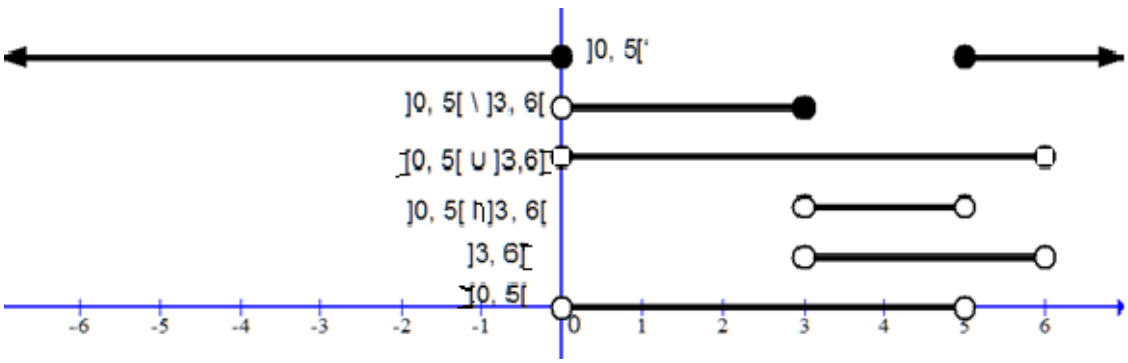
Le **complément (‘)** d’un intervalle est composé de tous les nombres réels qui ne sont pas dans cet intervalle. Souvent, il est exprimé sous la forme d’une réunion d’intervalles.

EXEMPLE :

]0, 5[‘ =] –∞, 0] U [5, ∞[

Vous avez sûrement remarqué que 0 et 5 font partie du complément de l’intervalle, justement parce qu’ils ne font pas partie de l’intervalle lui-même.

Voyez le tableau illustrant ces opérations.



NOTE : Faites les exercices de la section 1 dans le *Recueil des activités pratiques* avant de continuer la lecture.

Section 2 : les opérations mathématiques et les symboles arithmétiques

Dans le domaine de la chirurgie, les spécialistes réalisent des opérations très complexes et d’autres considérées plus routinières ou plus élémentaires pouvant servir de base pour les cas difficiles. Pour chacune des opérations, le chirurgien utilise des instruments et des règles pour arriver au meilleur résultat. En mathématiques, le même scénario se répète. Il existe des conventions qui se doivent d’être respectées pour que deux individus arrivent au même résultat et que ce résultat soit concluant et bénéfique, tout comme l’opération du chirurgien.

Les opérations mathématiques de base

Les opérations de base en mathématiques sont simples si les règles sont respectées. On s’en sert couramment dans la vie de tous les jours, au travail, à la maison et dans nos loisirs. Nous utilisons l'addition et la soustraction depuis au moins l'âge de 6 ans. Les deux autres opérations de base, soit la multiplication et la division, n'ont pas tardé à apparaître dans notre cheminement scolaire élémentaire. Ces opérations peuvent toutefois se compliquer selon les cas, comme le travail du chirurgien. Tout comme en français, par convention, les opérations mathématiques se lisent de gauche à droite.

L'addition

Le fait d'ajouter un nombre à un autre se définit comme étant une *addition.* Le résultat obtenu s'appelle une *somme.* Plusieurs situations de la vie courante font appel aux additions : le total des achats après une journée de magasinage, le solde d'un compte bancaire après un dépôt, la valeur des biens personnels, le total des dettes personnelles, le nombre de kilomètres parcourus à la suite de deux voyages, le nombre d'heures de travail réparties sur plusieurs journées, etc.

Andrée achète un verre à 8 $ et Mathieu, une tasse à 10 $. L'addition des deux nombres (ou termes) déterminera le total d'argent dépensé par les deux individus. Ainsi, le montant déboursé par Andrée et Mathieu totalise 18 $, la somme de 8 $ et 10 $ ou, en d'autres termes, le résultat de l'addition des deux nombres 8 et 10. Le symbole de l'addition est « + » et se lit « plus ». Le symbole d'égalité de l'opération est « = ». Notez que le symbole « = » signifie qu'il y a deux manières différentes d'écrire une même quantité. Mathématiquement, l'opération s'écrit comme suit :

Figure 1.3
L'addition

8	+	10	=	18
↑	↑	↑	↑	↑
Terme	Symbole de l'addition	Terme	Symbole d'égalité	Somme

L'addition a certaines propriétés. Elle est commutative et associative. La *commutativité* ne change pas le résultat de l'opération, peu importe l'emplacement des nombres dans la séquence de l'opération. Ainsi, la somme de $8+10$ équivaut à la somme de $10+8$, soit 18. L'*associativité*, sans modifier l'emplacement des nombres et le résultat de l'opération, permet de regrouper les nombres de différentes façons en utilisant les parenthèses[3]. Pour connaître le total des dépenses précédentes de Mathieu et Andrée, ainsi que celle reliée à l'achat d'un stylo par Nathalie, la somme de $8+10+12$ équivaut au total dépensé par Mathieu et Andrée plus le montant dépensé par Nathalie, soit

3. L'emploi des parenthèses sera étudié en détail au moment de la présentation des règles de priorité.

$(8+10)+12$ ou, encore, au montant dépensé par Mathieu plus le total dépensé par Andrée et Nathalie, soit $8+(10+12)$, soit 30 $.

Une dernière propriété à souligner est la présence d'un élément neutre pour l'addition. Un nombre est considéré comme *élément neutre* si le résultat de l'opération mathématique n'est pas modifié par la présence de ce nombre lors du traitement de l'opération. Le nombre « 0 » est considéré l'élément neutre de l'addition : en effet, $0+8=8$ ou $1\,000\,000+0=1\,000\,000$.

La soustraction

La soustraction est l'inverse de l'addition. *La soustraction* correspond à l'opération mathématique par laquelle un nombre est retranché d'un autre nombre. Elle permet entre autres de comparer deux nombres. Le résultat obtenu s'appelle la *différence*. Le résultat détermine ce qui reste. Intuitivement, cette opération est exécutée pour connaître l'écart entre deux prix de vente, le solde bancaire restant après un retrait, la valeur des biens personnels après une disposition, le total des dettes après un remboursement, le nombre de kilomètres séparant deux villes, etc.

Andrée vérifie le solde disponible sur sa carte de crédit. Le solde non utilisé se chiffre à 100 $. Le jeu vidéo à 92 $ l'intéresse beaucoup. La soustraction des deux nombres déterminera le solde disponible après cette dernière transaction (sans égard au rabais possible de 25 % et à la taxe). Ainsi, le solde non utilisé après la transaction représente 8 $, la différence entre 100 $ et 92 $, ou le résultat de la soustraction des deux nombres 100 et 92. Le symbole de la soustraction est « – » qui se lit « moins ». Mathématiquement, l'opération s'écrit comme suit :

Figure 1.4
L'addition

100	1	92	=	8
↑	↑	↑	↑	↑
Terme	Symbole de la soustraction	Terme	Symbole d'égalité	Différence

Comparativement à l'addition, la soustraction n'est ni commutative ni associative. En effet, la différence entre 100 et 92 ne correspond pas à la différence entre 92 et 100. En effet, si l'on soustrait 92 de 100, il reste 8, mais si l'on soustrait 100 de 92, il manque 8; ce n'est pas la même signification. La soustraction n'est pas non plus une opération associative : $(5-3)-1$ n'équivaut pas à $5-(3-1)$. En effet, $(5-3)-1$ égale $(2)-1$, soit 1, alors que $5-(3-1)$ égale $5-(2)$, soit 3.

La multiplication

On effectue une *multiplication* lorsque l'on additionne plusieurs fois le même nombre. Ainsi, pour connaître le coût total des coussins achetés par Nathalie, il faut additionner 5 fois le nombre 7 ou multiplier 5 par 7 $, ce qui donne 35 $. Le résultat obtenu s'appelle le *produit*. On effectue couramment cette opération pour déterminer le coût total de plusieurs unités d'un même produit. La multiplication peut aussi être utilisée pour établir le salaire hebdomadaire compte tenu du nombre d'heures travaillées et du taux horaire, le rendement d'un placement à partir de son taux de rendement et du capital, le montant d'impôt à payer compte tenu du revenu imposable et du taux d'imposition, etc.

Plusieurs symboles peuvent être utilisés pour indiquer une opération de multiplication. Le symbole le plus courant est le « × », utilisé surtout en arithmétique, mais on utilise aussi les symboles « • » ou « * »; ils se lisent « multiplié par » ou « fois ». Il est même possible, surtout en algèbre, de ne mettre aucun symbole si l'on utilise des parenthèses ou des lettres pour représenter les facteurs. En voici quelques exemples :

$$3(4+2)=3\times(4+2)$$
$$(1+9)(6+1)=(1+9)\times(6+1)$$
$$ab=a\times b$$
$$3a = 3 \times a$$

Mathématiquement, l'opération s'écrit de la façon suivante :

Figure 1.5
La multiplication

5	x	7	=	35
↑	↑	↑	↑	↑
Facteur	Symbole de la multiplication	Facteur	Symbole d'égalité	Produit

La multiplication est commutative et associative. En effet, le nombre 5 multiplié par 7 ou le nombre 7 multiplié par 5 produit le même résultat, soit le nombre 35. L'associativité est également validée pour la multiplication : $(10\times 2)\times 5=10\times(2\times 5)=100$. Le nombre « 1 » est l'élément neutre de la multiplication : $1\times 8=8\times 1=8$ ou $1\times 1\,000\,000=1\,000\,000\times 1=1\,000\,000$.

Tout nombre multiplié par zéro donne « 0 » comme produit : $0\times 8=0$ ou $0\times 1\,000\,000=0$. Chaque nombre multiplié par un ou plusieurs autres nombres est appelé un *facteur*. Ainsi dans l'opération $5\times 7=35$, les nombres 5 et 7 sont considérés comme des facteurs.

La division

L'inverse de la multiplication est la *division*. Tout comme la soustraction, elle permet de comparer deux nombres. Le résultat obtenu s'appelle le *quotient*. Le quotient est la conséquence d'une séparation d'un nombre en plusieurs parties. Consciemment ou non, la division est utilisée pour connaître le coût unitaire d'un article lors d'un achat regroupant plusieurs unités du même article, le salaire horaire à partir d'un salaire hebdomadaire et du nombre d'heures travaillées, la période requise pour accumuler une somme d'argent quelconque compte tenu des possibilités d'épargne mensuelle ou annuelle, etc.

Nathalie est fière d'avoir payé 35 $ pour l'achat de 5 coussins. Pour déterminer le coût unitaire des coussins, elle doit se demander combien de fois le nombre 5 se retrouve dans 35. Il suffit de diviser 35 par 5, l'opération inverse de la multiplication. Le nombre que l'on veut diviser est appelé le *dividende* et celui qui divise est appelé le *diviseur.* En arithmétique, le symbole communément utilisé pour la division est « ÷ », mais en algèbre, on utilise plutôt la barre de fraction (/ ou —). Ces symboles se lisent « divisé par ». Mathématiquement, l'opération s'écrit de la façon suivante :

Figure 1.6
La division

35	÷	5	=	7
↑	↑	↑	↑	↑
Dividende	Symbole de la division	Diviseur	Symbole d'égalité	Quotient

La division n'est ni commutative, ni associative. En effet, le nombre 35 divisé par 5 ou le nombre 5 divisé par 35 ne donne pas le même résultat. L'associativité n'est pas plus validée : $(10 \div 2) \div 5$ ne correspond pas à $10 \div (2 \div 5)$. La division par zéro n'est pas définie parce que, quel que soit le nombre multiplié par zéro, le résultat donne toujours zéro.

Lorsque l'on exprime un nombre sous la forme d'une division d'un nombre entier par un autre nombre entier différent de zéro (la division par zéro n'étant pas définie), on appelle cette forme une *fraction*. Par exemple $\frac{3}{4}$, $\frac{35}{5}$, $\frac{10}{3}$ ou $\frac{22}{7}$ sont des fractions. Le résultat peut être inférieur à un entier, comme $\frac{3}{4}$ et être exprimé en nombre décimal, soit 0,75. Cette fraction ou cette division d'un nombre par un autre peut résulter en un nombre entier, soit une fraction n'entraînant aucun reste. L'exemple cité plus haut correspond à cette affirmation : $\frac{35}{5} = 7$, 7 étant un nombre entier. Le résultat peut entraîner un reste, c'est-à-dire un nombre entier et une partie d'un nombre entier. Ce nombre s'appelle un *nombre fractionnaire*. Ainsi 10 divisé par 3 nous donne 3 reste 1, soit 3 et une partie de 3, soit 3 et $\frac{1}{3}$ ($3\frac{1}{3}$).

Les règles de signe

Plusieurs opérations mathématiques font intervenir au moins deux nombres. Ces nombres peuvent être tous positifs, tous négatifs ou négatif et positif. Les signes des nombres influencent les résultats des opérations mathématiques. Les résultats sont affectés par les signes (+ ou –), et aussi par l'opération en cause. Des règles ont été établies pour assurer des résultats uniformes et cohérents. Ainsi, les *règles de signe* dictent les résultats des opérations. Le tableau 1.1 résume ces différentes règles.

Tableau 1.1
Les règles de signe

Règles de l'addition :

a) La somme de deux nombres de même signe est affectée par le même signe que celui des deux nombres.

EXEMPLE :

$8+10=18$

EXEMPLE :

$-8+(-10)=-18$

b) La somme de deux nombres dont les signes sont différents est égale à la soustraction de leur valeur absolue, affectée du signe de celui qui a la plus grande valeur absolue.

EXEMPLE :

$(-3)+4 = |4|-|3| = 1$

EXEMPLE :

$(-5)+4 = |5|-|4| = -1$

c) La somme d'un nombre et son opposé est zéro.

EXEMPLE :

$3+(-3)=0$

Règles de la soustraction :

a) Un nombre positif soustrait d'un nombre négatif engendre une réponse négative.

EXEMPLE :

$-10-(8)=-10+(-8)=-18$ ou $-8-(10)=-8+(-10)=-18$

b) Un nombre négatif soustrait d'un nombre positif engendre une réponse positive.

EXEMPLE :

$10-(-8)=10+8=18$ ou $8-(-10)=8+10=18$

c) Le résultat de la soustraction de deux nombres négatifs prend le signe de celui des deux qui a la plus grande valeur absolue.

EXEMPLE :

$-10-(-8)=-10+8=-2$

EXEMPLE :

$-8-(-10)=-8+10=2$

Règles de la multiplication :

a) Le produit de deux nombres positifs est positif.

EXEMPLE :

$5\times 7=35$

b) Le produit de deux nombres négatifs est positif.

EXEMPLE :

$-5\times -7=35$

c) Le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif est négatif.

EXEMPLE :

$-5\times 7=-35$; ou $5\times -7=-35$

Règles de la division :

a) Le quotient de deux nombres positifs est positif.

EXEMPLE :

$35 \div 5 = 7$

b) Le quotient de deux nombres négatifs est positif.

EXEMPLE :

$-35 \div -5 = 7$

c) Le quotient d'un nombre positif et d'un nombre négatif est négatif.

EXEMPLE :

$-35 \div 5 = -7$; ou $35 \div -5 = -7$

Les règles précédentes démontrent que le résultat d'une multiplication ou d'une division est positif si les deux (deux étant un nombre pair) facteurs sont négatifs. Si un nombre impair de facteurs est négatif, le résultat est négatif. Alors si le nombre de signes négatifs dans l'opération est impair, le résultat est négatif et si le nombre est pair, le résultat est positif.

EXEMPLES :

$-2 \times -5 \times 7 = 70$; nombre pair de facteurs négatifs = résultat positif.
$-2 \times -5 \times 7 \times -3 = -210$; nombre impair de facteurs négatifs = résultat négatif.

Notons aussi qu'on peut éliminer toutes les soustractions. Elles deviennent toutes des additions pourvu qu'on change le signe du deuxième nombre de la soustraction.

Par exemple, 7 – (– 4) devient 7 + (+ 4) et on applique la règle des signes de l'addition. Ici, on additionne les deux nombres et la réponse est du même signe : + 11.

De même, 4 – (+ 5) devient 4 + (– 5). C'est une addition de deux nombres de signes différents. La règle dit qu'on soustrait les valeurs absolues et qu'on donne à la réponse le signe de celui qui a la plus grande valeur absolue. Donc, le résultat est – 1.

Si l'on transforme toutes les soustractions en additions, on peut résumer la règle des signes en quatre phrases :

– La multiplication ou la division de deux nombres de même signe donne un résultat positif.
– La multiplication ou la division de deux nombres de signes différents donne un résultat négatif.

- L'addition de deux nombres de même signe donne la somme de leurs valeurs absolues avec le même signe que ces nombres.
- L'addition de deux nombres de signes différents donne la différence de leurs valeurs absolues avec le signe de celui qui a la plus grande valeur absolue.

L'expression numérique et les règles de priorité

Les opérations mathématiques que nous avons vues utilisent au moins deux nombres. Le regroupement d'une séquence de nombres et d'opérations mathématiques se définit comme étant une *expression numérique*. Ainsi, $8+10$ représente une expression numérique. Cette expression décrit les nombres 8 et 10 liés par une opération mathématique, l'addition.

Les expressions numériques peuvent être plus complexes que celle citée en exemple. Nous pourrions vouloir calculer le total de certains achats de la journée :

- 1 tasse à 10 $,
- 1 verre à 8 $,
- 1 stylo à 12 $,
- 5 coussins à 7 $ chacun,
- 10 paires de bas à 3 $ la paire,
- 1 cravate à 65 $ avec un coupon-rabais de 15 $.

Écrivons ce calcul sous forme d'expression numérique :

$$1\times10+1\times8+1\times12+5\times7+10\times3+1\times65-15$$

Cette série de nombres et de signes ne nous permet pas de visualiser clairement les liens entre les différents nombres. L'emploi de parenthèses et d'accolades aide à préciser les nombres liés entre eux par les opérations mathématiques et, par conséquent, à arriver au bon résultat. Clarifions l'expression numérique des achats de la journée en ajoutant des parenthèses et des accolades :

$$(1\times10)+(1\times8)+(1\times12)+(5\times7)+(10\times3)+\left[1\times(65-15)\right]$$

Écrivons l'expression numérique en supposant cette fois que Philippe bénéficie de 2 coupons-rabais de 15 $ pour l'achat de sa cravate :

$$(1\times10)+(1\times8)+(1\times12)+(5\times7)+(10\times3)+\left[1\times(65-(2\times15))\right]$$

L'expression numérique nous permet de conceptualiser notre raisonnement. Une fois la situation bien établie et bien raisonnée, il suffit de procéder au calcul. Le résultat attendu doit être le même, peu importe qui procède au calcul. Le chirurgien a des règles à respecter pour mener à terme son opération : ainsi, le patient doit être endormi avant d'être opéré. Le calcul d'une expression numérique repose également sur des règles. Ces règles, appelées *règles de priorité*, définissent la séquence des opérations à effectuer. Elles déterminent les opérations mathématiques qui doivent être calculées en premier. Elles permettent ainsi d'alléger, au fur et à mesure de l'exécution, l'expression numérique. Ces règles nous dictent un ordre à suivre selon les priorités établies. L'expression numérique doit être simplifiée en respectant cet ordre pour assurer un résultat mathématique adéquat. Le tableau 1.2 résume l'application de ces règles.

Tableau 1.2
Les règles de priorité des opérations mathématiques

Règles de priorité	Opérations	Abréviations
1. L'intérieur des parenthèses doit être calculé. Lorsqu'il y a parenthèses, crochets et accolades, il faut simplifier prioritairement l'opération en débutant par les parenthèses intérieures : solutionner de l'intérieur vers l'extérieur.	Parenthèses	P
2. Les nombres affectés d'exposants doivent être évalués.	Exponentiation	E
3. Les divisions et les multiplications doivent être calculées. Ces deux opérations ont la même priorité. Elles sont évaluées dans l'ordre où elles apparaissent dans l'expression numérique établie, en se référant à la convention d'écriture indiquée plus loin.	Divisions Multiplications	D M
4. Finalement, les additions et les soustractions doivent être calculées. Ces deux opérations ont la même priorité. Elles sont évaluées à partir de la gauche de l'expression numérique en allant vers la droite (convention d'écriture).	Additions Soustractions	A S

La convention d'écriture d'une expression numérique est la suivante : une expression numérique doit se lire et se calculer de gauche à droite selon les règles de priorité définies plus bas.

L'acronyme PEDMAS nous permet de mémoriser rapidement l'ordre des opérations. Il faut se rappeler ce sigle pour toute expression numérique à simplifier. Il faut remarquer que la division et la multiplication sont sur un pied d'égalité (donc une opération ne vient pas avant l'autre) et qu'elles devancent l'addition et la soustraction (ces dernières ayant la même priorité). En d'autres mots, il faut évaluer les multiplications et les divisions avant les additions et les soustractions. Quand une même priorité est accordée, ces opérations sont effectuées au fur et à mesure qu'elles sont présentées dans l'expression numérique, c'est-à-dire évaluées de gauche à droite de façon séquentielle. Appliquons ces règles de priorité aux achats de la journée pour simplifier l'expression numérique :

$$\begin{aligned}
&(1\times10)+(1\times8)+(1\times12)+(5\times7)+(10\times3)+\left[1\times(65-15)\right]\\
=\ &(1\times10)+(1\times8)+(1\times12)+(5\times7)+(10\times3)+(1\times50)\\
=\ &10+8+12+35+30+50\\
=\ &145
\end{aligned}$$

ou, dans le cas où Philippe bénéficie de deux coupons-rabais pour l'achat de sa cravate :

$$\begin{aligned}
&(1\times10)+(1\times8)+(1\times12)+(5\times7)+(10\times3)+\left[1\times(65-(2\times15))\right]\\
=\ &(1\times10)+(1\times8)+(1\times12)+(5\times7)+(10\times3)+\left[1\times(65-30)\right]\\
=\ &(1\times10)+(1\times8)+(1\times12)+(5\times7)+(10\times3)+(1\times35)\\
=\ &10+8+12+35+30+35\\
=\ &130
\end{aligned}$$

Les règles de priorité permettent donc d'évaluer une expression numérique de gauche à droite. L'ordre est préétabli afin d'assurer une écriture, une lecture et un calcul uniforme d'un problème à l'autre, d'une personne à l'autre. Peu importe l'outil utilisé, crayon, calculatrice (dans la mesure où il s'agit d'une calculatrice scientifique) ou ordinateur, le raisonnement ne change pas. L'ordre d'entrée des données et de calcul est le même. Le respect des règles de priorité assure un résultat adéquat et vérifiable.

Il peut arriver qu'une suite d'additions et de soustractions soient présentées dans une expression numérique. Par exemple :

$$43+5-2+4-8+6=?$$

Pour faciliter le calcul, la démarche suivante est proposée :

1. Addition des additions	$43+5+4+6=58$
2. Additions des soustractions	$(-2)+(-8)=(-10)$
3. Addition des deux résultats précédents	$58+(-10)=48$

L'inégalité des opérations mathématiques

Les opérations mathématiques présentées plus haut démontrent des résultats d'égalité entre ce que l'on cherche ($\frac{35}{5}$) et ce que l'on trouve (7). Cette égalité est représentée par le signe « = ». Mais il peut aussi arriver qu'une comparaison entre deux résultats d'opérations ou entre deux nombres soit nécessaire. Plusieurs symboles mathématiques sont utilisés pour exprimer la conclusion de la comparaison effectuée. Le tableau 1.3 présente une liste des principaux symboles utilisés, leur description et un ou deux exemples pour chacun.

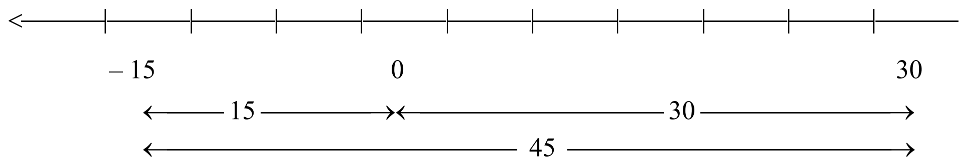
Tableau 1.3
Les symboles d'inégalité

Symboles	Description	Exemples
$\cong$	Ce symbole signifie une approximation. Le terme à gauche de ce signe est approximativement égal au terme de droite. Les deux termes ont à peu près la même valeur.	$89{,}99 \cong 90$
$<$	Ce symbole signifie que le terme à gauche du signe est strictement plus petit que le terme de droite. Le terme à gauche ne peut être égal ni supérieur au terme de droite.	$89{,}9 < 90$
$\leq$	Ce symbole signifie que le terme à gauche du signe est plus petit ou égal au terme à droite du signe. Le terme de gauche ne peut être supérieur, mais peut être égal, au terme de droite. Les deux termes peuvent avoir la même valeur.	$(90+10) \leq 100$ $90 \leq 100$
$>$	Ce symbole signifie que le terme à gauche du signe est strictement plus grand que le terme de droite. Le terme de gauche ne peut être égal ni inférieur au terme de droite.	$89{,}99 > 80$
$\geq$	Ce symbole signifie que le terme à gauche du signe est plus grand ou égal au terme de droite. Le terme de gauche ne peut être inférieur, mais peut être égal, au terme de droite. Les deux termes peuvent avoir la même valeur.	$89{,}99 \geq 80$ $89{,}99 \geq 89{,}99$
$\neq$	Ce symbole signifie que le terme à gauche du signe est différent du terme de droite. Le terme de gauche est plus grand ou plus petit que le terme à droite du signe d'inégalité, mais jamais égal.	$89{,}99 \neq 100$ $89{,}99 \neq 80$

Des applications financières

Les différents concepts étudiés dans ce module sont à la base des mathématiques. Ces notions sont appliquées quotidiennement à la maison comme au travail. Voici deux situations financières qui font appel à la bonne compréhension de ces concepts de base.

– Un entrepreneur veut connaître la variation des stocks ou la variation du bénéfice brut entre deux exercices financiers. L'exercice financier de l'an dernier lui montrait un bénéfice brut de 30 millions de dollars et cette année, une perte brute de 15 millions. Il s'interroge sur la variation du bénéfice brut. L'opération mathématique correspondante est $30-(-15)$ ou $30+15=45$ et non $30-15=15$. Il peut vérifier cette évaluation en utilisant une règle de graduation.



– Un entrepreneur vérifie les changements survenus dans les liquidités par l'examen des variations de certains postes du bilan :

Poste du bilan	Montant de l'année courante	Montant de l'année précédente	Variation	Changement
Immobilisations	$24\,000$	$20\,000$	$24\,000-20\,000$ $=24\,000+(-20\,000)$ $=+4\,000$	Augmentation des immobilisations au cours de l'exercice.
Encaisse	$10\,000$	$12\,000$	$10\,000-12\,000$ $=10\,000+(-12\,000)$ $=-2\,000$	Diminution de l'encaisse au cours de l'exercice.
Marge de crédit	$-4\,000$	$-3\,000$	$-4\,000-(-3\,000)$ $=-4\,000+3\,000$ $=-1\,000$	Augmentation de la marge de crédit au cours de l'exercice (l'augmentation est négative puisque la dette est plus importante).

Poste du bilan	Montant de l'année courante	Montant de l'année précédente	Variation	Changement
Comptes fournisseurs	$-3\,000$	$-4\,000$	$-3\,000-(-4\,000)$ $= -3\,000+4\,000$ $= 1\,000$	Diminution des comptes fournisseurs au cours de l'exercice (la diminution est positive puisque la dette est moins importante).

NOTE : Faites les exercices de la section 2 dans le Recueil des activités pratiques avant de continuer la lecture.

Section 3 : les fractions

Un nombre peut diviser un autre nombre. Le résultat obtenu peut être exprimé en entier mais aussi sous forme de fractions, de nombres décimaux ou en pourcentage. Le résultat exprimé de l'une ou l'autre des manières peut être converti sous une autre forme équivalente. Les trois prochaines sections portent sur l'expression de nombres sous forme de fractions, de nombres décimaux ou de pourcentages.

Une fraction est un nombre rationnel exprimé sous la forme $\frac{a}{b}$ ou a/b, où « *a* », appelé le *numérateur* (nombre au-dessus de la barre de fraction), représente le nombre de parties équivalentes et « *b* », appelé le *dénominateur* (nombre sous la barre de fraction), représente le total de parties équivalentes. La fraction représente une ou plusieurs parties d'un tout. En termes concrets, une fraction peut être un quartier d'orange, deux morceaux de tarte, une pointe de pizza, quatre heures dans une journée, un tiers de rabais, etc.

Le terme *rapport* est également utilisé pour exprimer la comparaison entre deux nombres. La relation entre deux nombres, le rapport entre a et *b*, s'écrit $\frac{a}{b}$, ou $a:b$ et se lit « le rapport de *a* à *b* ». Ce rapport entre *a* et *b*, exprimé en notation fractionnaire, peut aussi être converti en nombre décimal ou en pourcentage. La fraction inverse d'un rapport est appelée *rapport inverse*. Ainsi, $\frac{b}{a}$ est le rapport inverse du rapport $\frac{a}{b}$.

La proportion

Deux fractions ou deux rapports peuvent être égaux : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Cette égalité est vérifiée si $ad=bc$. L'égalité entre deux rapports s'appelle une *proportion*. Les termes *a* et *d* sont appelés les *extrêmes* de la proportion et *b* et *c*, les *moyens*. Par ailleurs, dans une proportion de la forme $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$, le terme *b* est appelé moyen proportionnel entre *a* et *d*. Dans l'exemple suivant, 2 est le moyen proportionnel entre 4 et 1.

$$\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$$

Il existe plusieurs propriétés intéressantes des proportions. Nous nous contenterons d'en présenter quelques-unes, les plus couramment utilisées. Dans les exemples suivants, le symbole $\Rightarrow$ indique la suite de l'opération ou l'étape de calcul suivante. Il peut se lire « alors » ou « cela implique ».

Propriété 1 :

Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, c'est-à-dire si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors $a\times d=b\times c$ ou $ad=bc$.

PAR EXEMPLE

$$\frac{4}{5}=\frac{8}{10} \Rightarrow 4\times10=5\times8 \Rightarrow 40=40.$$

Si *b* est le moyen proportionnel entre *a* et *d*, soit $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$, on a alors $ad=b^2$.

Si $\frac{3}{9}=\frac{9}{27}$, alors $3\times27=81$ ou $(9)^2$.

Propriété 2 :

Si quatre quantités sont proportionnelles, les rapports inverses sont également proportionnels, c'est-à-dire si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ et $bc=ad$.

PAR EXEMPLE

$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$, alors $\frac{5}{4}=\frac{10}{8} \Rightarrow 5\times8=4\times10 \Rightarrow 40=40$.

Propriété 3 :

Dans toute proportion, on peut interchanger les moyens, c'est-à-dire si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ et $ad=cb$.

PAR EXEMPLE

$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$, alors $\frac{4}{8}=\frac{5}{10} \Rightarrow 4\times10=8\times5 \Rightarrow 40=40$.

Propriété 4 :

Dans toute proportion, on peut intervertir les extrêmes, c'est-à-dire si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ et $da=bc$.

PAR EXEMPLE

$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$, alors $\frac{10}{5}=\frac{8}{4} \Rightarrow 10\times 4=5\times 8 \Rightarrow 40=40$.

Ces propriétés vous seront utiles pour déterminer des inconnues et pour l'étude des fonctions, notions étudiées aux modules 2 et 4. L'appellation « *règle de trois* » découle des propriétés présentées plus haut; cette règle est très importante pour déterminer la valeur d'une inconnue quand les trois autres termes de la proportion sont connus. Nous aborderons cette règle au module 3.

Les fractions équivalentes

Deux fractions sont équivalentes si elles correspondent au même nombre rationnel. Ainsi, $\frac{4}{5},\frac{8}{10},\frac{16}{20},\frac{80}{100},\frac{160}{200}$ désignent des *fractions équivalentes* puisqu'elles représentent toutes le nombre décimal $0{,}8$. Pour trouver une fraction équivalente à une autre, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par un même nombre différent de zéro. Le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{4}{5}$ ont été multipliés par deux pour former la fraction $\frac{8}{10}$, ainsi l'équivalence des deux fractions est vérifiée. Quelle serait la fraction équivalente à $\frac{4}{5}$ si nous voulions que le dénominateur soit égal à 40? Il faut multiplier le dénominateur actuel, 5, par 8 pour obtenir 40. Étant donné que le dénominateur a été multiplié par 8, il faut appliquer le même facteur au numérateur pour ne pas changer la valeur de la fraction. La fraction équivalente est $\frac{32}{40}$. Rappelez-vous qu'on obtient toujours une fraction équivalente en multipliant par un même nombre différent de 0 le numérateur et le dénominateur de cette fraction. Vous aurez besoin de ce résultat pour être en mesure d'additionner ou de soustraire des fractions de dénominateurs différents.

EXEMPLE :

Donnez 3 fractions équivalentes à $\frac{2}{3}$.

SOLUTION

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{4}{6}$ $\frac{2}{3}\times\frac{6}{6}=\frac{12}{18}$ $\frac{2}{3}\times\frac{25}{25}=\frac{50}{75}$

Une infinité de réponses sont possibles pourvu que le numérateur et le dénominateur soient multipliés par le même facteur. Ainsi, la valeur de la fraction ne change pas.

Selon les circonstances, nous pourrions vouloir alléger la présentation de la fraction. En supposant que nous voulions réduire la fraction à sa plus simple expression, il est possible de diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction résultante par un même nombre différent de 0. Cette division est répétée jusqu'à ce que le diviseur commun des deux termes de la fraction soit égal à 1. Il suffit de trouver une fraction équivalente non pas en multipliant chaque terme de la fraction mais, cette fois-ci, en leur trouvant un diviseur commun. Pour éviter des répétitions de division, il faudra trouver le *plus grand commun diviseur* (PGCD), c'est-à-dire le plus grand nombre qui divise à la fois le numérateur et le dénominateur. Ces notions d'allégement de fractions font référence aux fractions réductibles et irréductibles. Une fraction *réductible* est une fraction où le numérateur et le dénominateur ont au moins un diviseur commun différent de 1. Une fraction est dite *irréductible* si le seul diviseur commun au numérateur et au dénominateur est le nombre 1. La fraction est ainsi réduite à sa plus simple expression.

Pour passer d'une fraction réductible à une fraction irréductible, le nombre de divisions peut être facilement supérieur à 2 si l'on cherche toujours à diviser par les plus petits diviseurs premiers. Ainsi, pour exprimer la fraction $\frac{24}{48}$ en fraction irréductible, et procéder en divisant chaque terme par 2 et 3, quatre divisions sont nécessaires :

$$\frac{24 \div 2}{48 \div 2} = \frac{12}{24} \Rightarrow \frac{12 \div 2}{24 \div 2} = \frac{6}{12} \Rightarrow \frac{6 \div 2}{12 \div 2} = \frac{3}{6} \Rightarrow \frac{3}{6} \div \frac{3}{3} = \frac{1}{2}$$

La fraction $\frac{1}{2}$ est une fraction irréductible, fraction réduite à sa plus simple expression puisqu'aucun nombre différent de 1 ne divise à la fois le numérateur et le dénominateur.

Pour simplifier le calcul précédent, c'est-à-dire réduire la fraction à sa plus simple expression, il suffit de déterminer le PGCD du numérateur et du dénominateur. Voici les étapes à suivre :

1. Trouver l'ensemble des diviseurs positifs du numérateur et du dénominateur.

   L'ensemble des diviseurs de 24 (ou, abrégé, « div(24) »), correspond à $\{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 \}$.
   L'ensemble des diviseurs de 48, div(48), correspond à $\{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 \}$.

2. Trouver le PGCD de chacun des ensembles.

   Le nombre 24 est le plus grand diviseur commun aux deux ensembles.

3. Diviser le numérateur et le dénominateur par le PGCD.

   $\frac{24 \div 24}{48 \div 24} = \frac{1}{2}$, fraction irréductible, fraction réduite à sa plus simple expression puisqu'aucun nombre, différent de 1, divise à la fois le numérateur et le dénominateur.

   $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$ sont deux fractions équivalentes.

EXEMPLE :

Trouver une fraction équivalente à 10, à 25, à 68.

SOLUTION

Un nombre entier est une fraction dont le dénominateur équivaut à 1.

$10 = \frac{10}{1}$ $\quad 25 = \frac{25}{1}$ $\quad 68 = \frac{68}{1}$

Par convention, le dénominateur 1 n'est pas écrit.

Il faut se rappeler que pour trouver une fraction équivalente, il suffit de multiplier ou de diviser le numérateur et le dénominateur par le même nombre. La fraction qui en résulte est équivalente à la fraction de départ. Cette équivalence est basée sur la multiplication ou la division par 1. Une fraction ayant le même nombre au numérateur et au dénominateur équivaut à 1. Ainsi, tout nombre multiplié ou divisé par 1 a la même valeur qu'initialement. La notion de fraction équivalente est importante : d'abord, elle permet l'addition et la soustraction de fractions et, ensuite, elle réduit une fraction à sa plus simple expression, concept utile pour alléger le résultat de la multiplication et de la division.

La comparaison des fractions

Différentes raisons nous amènent à vouloir comparer deux ou plusieurs fractions. La mise en situation du texte d'introduction nous en fournit des exemples : $\frac{1}{3}$ de rabais est-il plus avantageux que $\frac{1}{4}$? $\frac{2}{3}$ de rabais est-il plus avantageux que la $\frac{1}{2}$ du prix? $\frac{1}{2}$ du prix est-il plus avantageux que $\frac{1}{3}$ de rabais? Les numérateurs des fractions à comparer jouent un rôle important. Si le dénominateur est constant, plus le numérateur de la fraction est grand, plus la fraction est importante. Le commerçant qui offre $\frac{2}{3}$ de rabais est plus généreux que son compétiteur annonçant des rabais à $\frac{1}{3}$: $\frac{2}{3}$ est effectivement supérieur à $\frac{1}{3}$ puisque le numérateur est supérieur. Cette affirmation est vraie dans la mesure où l'on compare des oranges avec des oranges, c'est-à-dire des fractions ayant un même dénominateur.

Pour juger de la valeur d'une fraction par rapport à une autre, la notion de *dénominateur commun* est importante. Pour comparer $\frac{2}{3}$ avec $\frac{1}{2}$, il faut les exprimer sous forme de fractions ayant le même dénominateur. Les fractions équivalentes de $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}$ sont $\frac{4}{6}$ et $\frac{3}{6}$. Puisque les dénominateurs sont identiques, les numérateurs détermineront l'importance d'une fraction par rapport à l'autre. Un rabais de $\frac{2}{3}$ ou de $\frac{4}{6}$ du prix vous offre une meilleure économie qu'un rabais de $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{6}$ du prix.

La comparaison avec des dénominateurs communs n'est pas toujours nécessaire. Si les numérateurs des fractions sont identiques et les dénominateurs différents, alors le dénominateur joue un rôle important. Plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite. Ainsi, en comparant $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, on constate la supériorité de la fraction $\frac{1}{2}$. Pour nous en convaincre, nous pouvons exprimer ces fractions sous forme de fractions équivalentes ayant le nombre 6 comme dénominateur commun. Ainsi, la fraction $\frac{3}{6}$ est supérieure à $\frac{2}{6}$, son numérateur étant plus grand.

Une autre façon de comparer les fractions consiste à multiplier le dénominateur de l'une avec le numérateur de l'autre. L'exemple suivant démontre la procédure.

EXEMPLE :

Quelle fraction est la plus grande : $\frac{3}{5}$ ou $\frac{5}{7}$?

SOLUTION

1. Multipliez le dénominateur de la fraction de droite par le numérateur de la fraction de gauche. Écrivez le résultat sous la fraction de gauche.

   $\frac{3}{5}$

   $7 \times 3 = 21$

2. Multipliez le dénominateur de la fraction de gauche par le numérateur de la fraction de droite. Écrivez le résultat sous la fraction de droite.

   $\frac{5}{7}$

   $5 \times 5 = 25$

3. Comparez les résultats.

   21 < 25, alors $\frac{3}{5} < \frac{5}{7}$

   Si les fractions sont exprimées sous la forme d'un dénominateur commun, la même conclusion est validée :

   $\frac{3 \times 7}{5 \times 7} < \frac{5 \times 5}{7 \times 5}$, alors $\frac{21}{35} < \frac{25}{35}$

Les opérations mathématiques sur les fractions

Les fractions peuvent s'additionner, se soustraire, se multiplier et se diviser. Certaines règles doivent toutefois être respectées.

L'addition de fractions

Pour additionner les fractions ayant le même dénominateur, il suffit d'additionner les numérateurs. La fraction résultante aura comme numérateur la somme des numérateurs des différentes fractions additionnées et elle aura le même dénominateur, c'est-à-dire le dénominateur commun à chacune.

EXEMPLE :

L'heure de la livraison de la pizza a sonné. Chacune des quatre personnes présentes mange l'équivalent du huitième de la pizza. Quelle fraction ou partie de la pizza a été consommée?

SOLUTION

$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1+1+1+1}{8}=\frac{4}{8}$ de la pizza a été consommée. Elles ont consommé 4 parties égales des 8 parties égales totales. C'est équivalent à la moitié de la pizza.

Pour additionner des fractions ayant des dénominateurs différents, il faut d'abord exprimer ces fractions sous forme de fractions équivalentes ayant chacune le même dénominateur, d'où la notion de dénominateur commun. La notion de dénominateur commun signifie l'expression de chacune des fractions à additionner sous la forme de fractions équivalentes ayant un même dénominateur. Il existe plusieurs méthodes pour déterminer un dénominateur commun.

Une première méthode consiste à multiplier les dénominateurs des fractions que l'on veut additionner. Le produit déterminera, premièrement, le dénominateur des nouvelles fractions équivalentes et, deuxièmement, le dénominateur de la fraction résultant de la somme de l'opération.

EXEMPLE :

L'heure de la livraison de la pizza a sonné. Chacun prend la portion que son appétit lui commande. Andrée mange l'équivalent du sixième de la pizza, Georges également, Roger le tiers, et Pauline le quart. Quelle fraction ou partie de la pizza a été consommée?

SOLUTION

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=?$

Procédons par étape : André et Georges ont mangé les $\frac{2}{6}$:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$$

Ajoutons les portions des deux autres convives :

$$\frac{2}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=?$$

Les différentes fractions ne peuvent être additionnées sous cette forme, puisque leurs dénominateurs sont différents. Il faut alors exprimer les fractions avec un dénominateur commun. Selon la méthode suggérée, il suffit de multiplier les différents dénominateurs : $6\times3\times4=72$. Le produit, 72, correspond au dénominateur commun. Il faut par la suite exprimer chaque fraction sous la forme d'une fraction équivalente dont le dénominateur sera 72. Il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par un même nombre pour obtenir 72 au dénominateur. Cette opération est répétée pour chaque fraction. Ainsi,

$$\frac{2}{6}\times\frac{12}{12}=\frac{24}{72} \qquad \frac{1}{3}\times\frac{24}{24}=\frac{24}{72} \qquad \frac{1}{4}\times\frac{18}{18}=\frac{18}{72}$$

Puisque chaque fraction est exprimée avec un même dénominateur, l'addition des fractions est possible.

$$\frac{24}{72}+\frac{24}{72}+\frac{18}{72}=\frac{24+24+18}{72}=\frac{66}{72}$$

$\frac{66}{72}$ de la pizza ont été consommés. Les quatre amis ont consommé 66 parties égales des 72 parties égales totales. L'an prochain, ils pourront se rappeler qu'ils ont mangé $\frac{66}{72}$ d'une pizza le lendemain de Noël ou les $\frac{66}{72}$ de la pizza!

Cette fraction de pizza consommée semble lourde pour l'estomac et pas très commode dans une conversation! Une deuxième méthode, plus pratique, pour déterminer le dénominateur commun des fractions que l'on veut additionner est de trouver leur plus petit dénominateur commun. Le nombre recherché sera un multiple de chaque dénominateur. Un multiple d'un nombre représente le produit de ce nombre par un autre facteur entier. Chaque dénominateur multiplié par un autre facteur entier donnera ce nombre, c'est-à-dire le multiple recherché. Il faut déterminer le *plus petit commun multiple* (PPCM) de tous les dénominateurs, c'est-à-dire le plus petit nombre inclus dans chaque ensemble des multiples des dénominateurs.

Pour mieux visualiser les notions de multiple et facteur, référons-nous aux parties de la pizza. L'expression $\frac{2}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ représente l'opération mathématique à effectuer. Il faut déterminer le PPCM de 6, 3 et 4. Voici les étapes à suivre :

1. Trouver l'ensemble des multiples positifs des dénominateurs. Quel nombre est à la fois multiple de 3 (ou, abrégé, « mult(3) »), 4 et 6?

   Les multiples positifs de 3, mult(3), sont $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...\}$.

   Les multiples positifs de 4, mult(4), sont $\{4, 8, 12, 16, 20, ...\}$.

   Les multiples positifs de 6, mult(6), sont $\{6, 12, 18, 24, ...\}$.

2. Trouver le PPCM à chacun des ensembles. Quel est le plus petit nombre appartenant à chacun des ensembles de multiples? Le nombre 12 est le plus petit multiple commun aux trois ensembles. Le PPCM, 12, correspond au dénominateur commun.

3. Exprimer chaque fraction sous la forme d'une fraction équivalente dont le dénominateur sera 12. Il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par un même nombre pour obtenir 12 au dénominateur. Cette opération est répétée pour chaque fraction.

   $\frac{2}{6}\times\frac{2}{2}=\frac{4}{12}$ $\quad$ $\frac{1}{3}\times\frac{4}{4}=\frac{4}{12}$ $\quad$ $\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{3}{12}$

   Puisque chaque fraction est exprimée sous la forme d'un même dénominateur, l'addition des fractions est possible.

   $\frac{4}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4+4+3}{12}=\frac{11}{12}$ de la pizza ont été consommés. Les quatre amis ont consommé 11 parties égales des 12 parties égales totales.

Pour l'an prochain, il sera plus facile de se rappeler qu'ils ont mangé $\frac{11}{12}$ de la pizza comparativement à la fraction calculée selon l'autre méthode, soit $\frac{66}{72}$.

Les deux méthodes précédentes sont acceptables. La première donne souvent une fraction qui n'est pas nécessairement réduite à sa plus simple expression. Si le dénominateur et le numérateur peuvent être divisés par un même nombre, différent de 1, alors le dénominateur choisi ne correspond pas au PPCM. $\frac{66}{72}$ de la pizza ont été mangés. Dans la conversation de tous les jours, on aime mieux parler de la $\frac{1}{2}$ d'un tout plutôt que les $\frac{2}{4}$ même si, en réalité, on parle du même rapport : $\left(\frac{2\div 2}{4\div 2}=\frac{1}{2}\right)$. Pour la pizza, c'est la même chose.

Pour réduire la fraction $\frac{66}{72}$ à sa plus simple expression, il suffit de déterminer le PGCD du numérateur et du dénominateur. Ce nombre est 6 et la fraction réduite à sa plus simple expression sera $\frac{11}{12}$. Ce résultat correspond à celui obtenu précédemment alors que le PPCM a été utilisé comme dénominateur commun.

Il peut arriver que le processus de détermination du plus petit commun multiple (PPCM) de deux ou plusieurs nombres soit long et pénible. La procédure suivante, illustrée à l'aide d'un exemple, pourrait alors être utilisée.

Quel est le PPCM des nombres 5, 6, 8 et 9?

1. Placer les différents nombres sous forme de colonnes.

	5	6	8	9

2. Trouver le plus petit diviseur, différent de 1, qui s'applique à un ou plusieurs nombres. L'inscrire dans une colonne à gauche des précédentes.

	5	6	8	9
2				

3. Procéder à la division en inscrivant le résultat en dessous du dividende. Si la division n'est pas possible, réinscrire le nombre inchangé.

	5	6	8	9
2	5	3	4	9

4. Répéter l'étape 2 jusqu'à ce que, pour chaque nombre ou chaque colonne, le résultat soit 1.

	5	6	8	9
2	5	3	4	9
2	5	3	2	9
2	5	3	1	9
3	5	1	1	3
3	5	1	1	1
5	1	1	1	1

5. Multiplier tous les diviseurs inscrits dans la colonne de gauche. Le produit équivaudra au PPCM.

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$$

La soustraction de fractions

Additionner ou soustraire des fractions se fait de la même façon. En effet, les mêmes règles de dénominateur commun s'appliquent pour additionner ou soustraire deux ou plusieurs fractions.

EXEMPLE :

Quelle est la différence entre $\frac{5}{8}$ et $\frac{1}{8}$?

SOLUTION

$\frac{5-1}{8}=\frac{4}{8}$

$\frac{4\div 4}{8\div 4}=\frac{1}{2}$, fraction irréductible, fraction réduite à sa plus simple expression puisqu'aucun nombre, différent de 1, ne divise à la fois le numérateur et le dénominateur.

Quelle est la différence entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{8}$? L'expression $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$ représente l'opération mathématique à effectuer. Intuitivement, on voit bien maintenant qu'il faudra remplacer $\frac{1}{2}$ par $\frac{4}{8}$; mais procédons de façon méthodique. Il faut déterminer le PPCM de 2 et 8. Voici les étapes à suivre :

1. Trouver l'ensemble des multiples positifs des dénominateurs. Quel nombre est à la fois multiple de 2 et 8?

   Les multiples positifs de 2, mult(2), sont $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$.

   Les multiples positifs de 8, mult(8), sont $\{8, 16, ...\}$.

2. Trouver le PPCM de chacun des ensembles. Quel est le plus petit nombre appartenant à chacun des ensembles de multiples? Le nombre 8 est le plus petit multiple commun aux deux ensembles. Le PPCM, 8, correspond au dénominateur commun.

3. Exprimer chaque fraction sous la forme d'une fraction équivalente dont le dénominateur sera 8. Il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par un même nombre pour obtenir 8 au dénominateur. Cette opération est répétée pour chaque fraction.

   $\frac{1\times 4}{2\times 4}=\frac{4}{8}$ $\qquad$ $\frac{1\times 1}{8\times 1}=\frac{1}{8}$

   Puisque chaque fraction est exprimée avec un même dénominateur, la soustraction des fractions est possible.

   $\frac{4}{8}-\frac{1}{8}=\frac{4-1}{8}=\frac{3}{8}$

La multiplication des fractions

La multiplication de fraction est plus facile parce que, contrairement à l'addition ou à la soustraction, deux ou plusieurs fractions peuvent être multipliées même si les dénominateurs sont différents. Le produit de deux ou plusieurs fractions correspond à une fraction dont le numérateur équivaut au produit des numérateurs et le dénominateur, au produit des dénominateurs.

EXEMPLE :

Quel est le produit de $\frac{5}{12}$ multiplié par $\frac{4}{9}$?

SOLUTION

L'expression $\frac{5}{12}\times\frac{4}{9}$ représente l'opération mathématique à évaluer.

$\frac{5}{12}\times\frac{4}{9}=\frac{20}{108}$, qui est une fraction réductible. Exprimée sous forme de fraction irréductible, on obtient :

$$\frac{20\div 4}{108\div 4}=\frac{5}{27}$$

Le produit des fractions correspond aux produits des numérateurs sur les produits des dénominateurs. Pour faciliter la multiplication, on divise un numérateur et un dénominateur par le même nombre. Le numérateur peut être le numérateur de l'une ou l'autre des fractions et le dénominateur peut être le dénominateur de l'une ou l'autre des fractions.

Selon l'exemple précédent, le produit $\left(\frac{20}{108}\right)$ constitue une fraction réductible. À la suite de ce résultat, un même diviseur a été appliqué au numérateur et au dénominateur pour rendre cette fraction irréductible $\left(\frac{5}{27}\right)$. Pour alléger les multiplications des numérateurs et des dénominateurs, il peut être pratique de réduire les termes avant leur multiplication. Le produit montrera une fraction irréductible si la détermination des PGCD a été appliquée. Il suffit de réduire les facteurs des multiplications à leur plus simple expression avant de procéder à la multiplication des fractions.

EXEMPLE :

Quel est le produit de $\frac{5}{12}$ multiplié par $\frac{4}{9}$?

SOLUTION

L'expression $\frac{5}{12}\times\frac{4}{9}$ représente l'opération mathématique à évaluer. On s'aperçoit que le diviseur 4 est le plus grand facteur présent au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{5}{12\div 4}\times\frac{4\div 4}{9}$$

ce qui donne, après division, $\frac{5}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{5}{27}$.

EXEMPLE :

Quel est le produit des fractions $\frac{3}{8},\frac{4}{9},\frac{2}{7},\frac{7}{10}$?

SOLUTION

L'expression $\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}\times\frac{2}{7}\times\frac{7}{10}$ représente l'opération mathématique à effectuer. On s'aperçoit que le diviseur 3 est un facteur présent au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{3\div 3}{8}\times\frac{4}{9\div 3}\times\frac{2}{7}\times\frac{7}{10} = \frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{7}\times\frac{7}{10}$$

On s'aperçoit que le diviseur 4 est un facteur présent au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{1}{8\div 4}\times\frac{4\div 4}{3}\times\frac{2}{7}\times\frac{7}{10} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}\times\frac{7}{10}$$

On s'aperçoit que les diviseurs 2 et 7 sont des facteurs présents au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{1}{2\div 2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2\div 2}{7\div 7}\times\frac{7\div 7}{10} = \frac{1}{1}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{10}$$

Chacune des fractions est irréductible. Chaque numérateur avec chaque dénominateur forme des fractions irréductibles. Puisqu'il n'y a plus de diviseur commun différent de 1 qui divise à la fois un des numérateurs avec un des dénominateurs, on procède à la multiplication des fractions.

$\frac{1}{1}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{10} = \frac{1\times 1\times 1\times 1}{1\times 3\times 1\times 10} = \frac{1}{30}$, fraction irréductible

On peut refaire cette multiplication sans la réduction des facteurs avant l'opération.

$\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}\times\frac{2}{7}\times\frac{7}{10} = \frac{3\times 4\times 2\times 7}{8\times 9\times 7\times 10} = \frac{168}{5040}$, fraction réductible

Il faut trouver le PGCD de 168 et 5 040. Pas évident!

$$\frac{168\div 4}{5040\div 4} = \frac{42}{1260} \Rightarrow \frac{42\div 2}{1260\div 2} = \frac{21}{630} \Rightarrow \frac{21\div 7}{630\div 7} = \frac{3}{90} \Rightarrow \frac{3\div 3}{90\div 3} = \frac{1}{30}.$$

Cet exercice démontre qu'il est plus facile de trouver des facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs des fractions avant la multiplication car les nombres sont plus petits. Il est plus facile de réduire au fur et à mesure les numérateurs et les dénominateurs des fractions avant de procéder à la multiplication. La multiplication est également simplifiée; $(1\times 1\times 1\times 1)$ comparativement à $(3\times 4\times 2\times 7)$.

Une fraction peut aussi être multipliée par un nombre entier. Le produit des numérateurs sur le produit des dénominateurs donnera, une fois de plus, le résultat de la multiplication.

EXEMPLE :

Quel est le produit de 2 multiplié par $\frac{1}{3}$?

SOLUTION

L'expression $2\times\frac{1}{3}$ représente l'opération mathématique à évaluer.

$$\frac{2}{1}\times\frac{1}{3} = \frac{2\times 1}{1\times 3} = \frac{2}{3}$$

Précédemment, nous avons parlé des fractions équivalentes avec la multiplication et la division du numérateur et du dénominateur par le même nombre. Une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont représentés par le même nombre équivaut au nombre 1 : $\frac{2}{2}=1$, $\frac{18}{18}=1$, etc. Nous venons de voir que la multiplication des fractions correspond aux produits des numérateurs sur le produit des dénominateurs. Multiplier une fraction par une autre, dont le numérateur et le dénominateur sont représentés par le même nombre, équivaut à multiplier cette fraction par 1. La valeur du produit demeure inchangée au même titre que la multiplication ou la division d'un nombre entier par 1. Ainsi :

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{3}=\frac{4\times 3}{5\times 3}=\frac{12}{15} \Rightarrow \frac{12\div 3}{15\div 3}=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}\times 1=\frac{4}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{4\times 1}{5\times 1}=\frac{4}{5}$$

EXEMPLE :

Que choisiriez-vous entre la $\frac{1}{2}$ d'une tarte et le $\frac{2}{4}$ de celle-ci?

SOLUTION

$$\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{2}{4}$$

Le fait d'avoir multiplié par 2 le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{1}{2}$ afin d'établir une fraction dont le dénominateur serait égal à 4 pour comparer cette fraction équivalente à la fraction $\frac{2}{4}$ n'a rien changé à la valeur de la fraction $\frac{1}{2}$. Le fait de multiplier par 1 la fraction $\frac{1}{2}$, ou de multiplier par $\frac{2}{2}$ la fraction $\frac{1}{2}$, ne change rien à la valeur du résultat puisque nous multiplions par 1 de toute façon. Les deux fractions sont donc égales.

La division des fractions

Pour pouvoir diviser deux fractions, il faut convertir la division en multiplication. En effet, diviser un nombre par un autre correspond à multiplier le premier par l'inverse du second. Prenons l'exemple de la division de deux nombres entiers.

EXEMPLE :

Quel est le quotient de 12 divisé par 3?

SOLUTION

L'expression $12 \div 3$ représente l'opération mathématique à évaluer.

$$\frac{12}{1} \div \frac{3}{1} = \frac{12}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{12 \times 1}{1 \times 3} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1} = 4$$

On peut utiliser le même procédé pour les fractions.

EXEMPLE :

Quel est le quotient de $\frac{2}{7}$ divisé par $\frac{3}{4}$?

SOLUTION

L'expression $\frac{2}{7} \div \frac{3}{4}$ représente l'opération mathématique à effectuer.

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{2 \times 4}{7 \times 3} = \frac{8}{21}$$

Les fractions complexes

Une fraction est la division d'un nombre par un autre exprimée par un numérateur et un dénominateur. Si ces derniers sont eux-mêmes des fractions, la fraction ainsi formée est une *fraction complexe*. Cette fraction complexe est, en fait, une division de fractions. En procédant à la division, la fraction complexe est réexprimée en fraction ordinaire. Les mêmes opérations mathématiques peuvent alors être pratiquées.

EXEMPLE :

$$\frac{1/3}{2/5} = \frac{1}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$

La fraction complexe $\frac{1/3}{2/5}$ est exprimée sous la forme équivalente $\frac{5}{6}$.

EXEMPLE :

$$\frac{1/3}{2/5} + \frac{2/3}{3/4} = \left(\frac{1}{3} \div \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{6} + \frac{8}{9} = \frac{15+16}{18} = \frac{31}{18}$$

Les nombres fractionnaires

Il peut arriver que le résultat d'une opération mathématique sur des fractions se solde par un numérateur plus grand que le dénominateur, par exemple $\left(\frac{4}{3}\right)$. Cette situation nous confirme la présence d'un nombre entier $\left(\frac{3}{3}=1\right)$ et d'une fraction $\left(\frac{1}{3}\right)$. Nous pourrions vouloir exprimer cette fraction $\left(\frac{4}{3}\right)$ sous la forme d'un nombre fractionnaire, c'est-à-dire un nombre où la partie entière et la partie fractionnaire sont séparées $\left(1\frac{1}{3}\right)$. Un nombre fractionnaire est composé d'un nombre entier et d'une fraction.

Conversion d'une fraction en nombre fractionnaire

Pour exprimer une fraction en nombre fractionnaire, il suffit de diviser le numérateur par le dénominateur. Le résultat donnera un nombre entier et une partie non complète d'un tout, c'est-à-dire une autre fraction.

EXEMPLE :

Quel est le nombre fractionnaire équivalent à $\frac{32}{5}$?

SOLUTION

$32 \div 5$ = au moins 6

$6 \times 5 = 30$

$32 - 30 = 2$

il reste 2

$2 \div 5$; $\frac{2}{5}$, correspond à la fraction du nombre fractionnaire.

Donc, $\frac{32}{5}$ correspond à 6 et $\frac{2}{5}$, $6\frac{2}{5}$.

Conversion d'un nombre fractionnaire en fraction

Vous risquez d'avoir à faire cette opération souvent, puisqu'en algèbre, on travaille beaucoup plus avec la forme « fraction » qu'avec la forme « nombre fractionnaire ».

Pour exprimer un nombre fractionnaire en fraction, il faut appliquer le processus inverse. Les étapes suivantes expliquent la démarche :

1. Multiplier le nombre entier par le dénominateur de la fraction.
2. Ajouter à ce résultat la valeur du numérateur de la fraction; cette dernière somme représente le numérateur de la nouvelle fraction.

3. Placer cette somme au numérateur, le dénominateur de la fraction du nombre fractionnaire demeurant le dénominateur de la nouvelle fraction.

EXEMPLE :

Quelle est la fraction qui correspond au nombre fractionnaire $6\frac{2}{5}$?

SOLUTION

1. $6 \times 5 = 30$
2. $30 + 2 = 32$
3. $^{32}/_{5}$

Les opérations mathématiques sur les nombres fractionnaires

On peut vouloir effectuer des opérations mathématiques où des nombres fractionnaires sont impliqués. Les mêmes règles s'appliquent à la fraction du nombre fractionnaire ou après la conversion du nombre fractionnaire en fraction. Voici une ou deux méthodes pour additionner, soustraire, multiplier ou diviser des nombres fractionnaires.

L'addition des nombres fractionnaires

EXEMPLE :

Additionner $4\frac{1}{4}$ et $2\frac{1}{3}$.

SOLUTION

1. Additionner les entiers. La somme correspondra au nombre entier du nombre fractionnaire.
   $4 + 2 = 6$

2. Additionner les fractions. La somme correspondra à la fraction du nombre fractionnaire.
   $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$

3. La somme des nombres fractionnaires correspond à la mise en commun des résultats des deux étapes précédentes.
   $6\frac{7}{12}$

Surveillez le résultat de la somme des fractions. Si le numérateur devient supérieur au dénominateur, un autre nombre fractionnaire vient d'être créé, d'où la présence d'un autre nombre entier qui vient s'ajouter au premier résultat. Pour éviter ces multiples additions, il est plus pratique d'adopter la méthode suivante :

1. Convertir chaque nombre fractionnaire en fraction.

$$4\frac{1}{4}=\frac{4\times 4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{16}{4}+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

$$2\frac{1}{3}=\frac{2\times 3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

2. Additionner les fractions.

$$\frac{17}{4}+\frac{7}{3}=\frac{(3\times 17)+\left(4\times 7\right)}{4\times 3}=\frac{51+28}{12}=\frac{79}{12}$$

3. Convertir la fraction en nombre fractionnaire.

$$\frac{79}{12}=\frac{\left(6\times 12\right)+7}{12}=6\frac{7}{12}$$

La soustraction des nombres fractionnaires

EXEMPLE :

Calculer $4\frac{1}{4} - 2\frac{1}{3}$.

SOLUTION

1. Soustraire les entiers des entiers. La différence correspondra au nombre entier du nombre fractionnaire.

   $4-2=2$

2. Soustraire les fractions des fractions. La différence correspondra à la fraction du nombre fractionnaire.

   $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{3-4}{12}=-\frac{1}{12}$

3. La différence des nombres fractionnaires correspond à la mise en commun des résultats des deux étapes précédentes.

   $2-\frac{1}{12}=\frac{24-1}{12}=\frac{23}{12}=1\frac{11}{12}$

Lorsque l'on additionne ou soustrait des fractions de nombres fractionnaires, il peut arriver, comme dans l'exemple ci-dessus, que le résultat fractionnaire empiète sur le résultat de la partie entière. Il est alors pratique d'adopter la méthode de calcul suivante :

1. Convertir chaque nombre fractionnaire en fraction.

$$4\frac{1}{4}=\frac{4\times 4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{16}{4}+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$
$$2\frac{1}{3}=\frac{2\times 3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

2. Soustraire les fractions.

$$\frac{17}{4}-\frac{7}{3}=\frac{(3\times 17)-\left(4\times 7\right)}{4\times 3}=\frac{51-28}{12}=\frac{23}{12}$$

3. Convertir la fraction en nombre fractionnaire.

$$\frac{23}{12}=1\frac{11}{12}$$

La multiplication des nombres fractionnaires

EXEMPLE :

Multiplier $4\frac{1}{4}$ par $2\frac{1}{3}$.

SOLUTION

1. Convertir chaque nombre fractionnaire en fraction.

$$4\frac{1}{4}=\frac{4\times 4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{16}{4}+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$
$$2\frac{1}{3}=\frac{2\times 3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

2. Multiplier les fractions.

$$\frac{17}{4}\times\frac{7}{3}=\frac{119}{12}$$

3. Convertir la fraction en nombre fractionnaire.

$$\frac{119}{12}=9\frac{11}{12}$$

Si le nombre fractionnaire est multiplié par un entier, on peut multiplier l'entier du nombre fractionnaire par l'entier et la fraction du nombre fractionnaire par l'entier. La somme des deux produits correspondra au produit du nombre fractionnaire par le nombre entier.

EXEMPLE :

$$4\frac{1}{4}\times 5$$

SOLUTION

1. $4 \times 5 = 20$
2. $\frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4}$
3. $20 + \frac{5}{4} = \frac{80+5}{4} = \frac{85}{4} = 21\frac{1}{4}$

Ou en transformant $4\frac{1}{4}$ en $\frac{17}{4}$,

$\frac{17}{4} \times 5 = \frac{85}{4} = 21\frac{1}{4}$

Cette procédure peut aussi être utilisée si deux nombres fractionnaires sont multipliés. Mais attention car les calculs sont plus complexes et peuvent même se révéler trompeurs, car il faut effectuer toutes les combinaisons de multiplication.

EXEMPLE :

$4\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{3}$

SOLUTION

$$(4 \times 2) + \left(4 \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} \times 2\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 8 + \frac{4}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{12} = \frac{96+16+6+1}{12} = \frac{119}{12} = 9 \ .$$

La division des nombres fractionnaires

EXEMPLE :

Diviser $4\frac{1}{4}$ par $2\frac{1}{3}$.

SOLUTION

1. Convertir chaque nombre fractionnaire en fraction.

   $4\frac{1}{4} = \frac{4 \times 4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

   $2\frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

2. Diviser les fractions.

   $\frac{17}{4} \div \frac{7}{3} = \frac{17}{4} \times \frac{3}{7} = \frac{51}{28}$

3. Convertir la fraction en nombre fractionnaire.

   $\frac{51}{28} = 1\frac{23}{28}$

En résumé, il vous est conseillé de toujours transformer les nombres fractionnaires en fractions avant d'effectuer les diverses opérations. Si ce n'est pas explicitement demandé, on vous conseille aussi de ne pas revenir à la forme nombre fractionnaire à la fin des opérations. Laissez la réponse sous la forme de fraction; c'est aussi valable.

NOTE : Faites les exercices de la section 3 dans le *Recueil des activités pratiques* avant de continuer la lecture.

Section 4 : les nombres décimaux

Nous utilisons quotidiennement un système de numérotation décimale, un système en base 10 : l'achat d'un article au prix de 22,50 $, la syntonisation du poste radiophonique 107,5, etc. Ce système constitue les nombres décimaux, symbolisés par « $\mathbb{D}$ ». L'emplacement des chiffres dans le nombre alloue des valeurs différentes à ces chiffres : des milliers, des centaines, des dizaines, des unités. Un nombre décimal est formé aussi d'une partie fractionnaire. Cette partie fractionnaire, que l'on retrouve à droite de la virgule, constitue la partie décimale ou le développement décimal du nombre décimal. Un nombre décimal peut être composé d'une partie décimale seulement. La virgule sépare le nombre entier de sa partie fractionnaire. Cette partie fractionnaire ou décimale est exprimée sous forme de dixième, de centième, de millième, etc. Du côté droit de la virgule, on ne parle pas d'unités, de centaines ou de milliers mais d'une partie de 10, de 100 ou de 1 000 (ou dixième, centième ou millième), d'où les notions fractionnaire ou décimale.

La partie fractionnaire d'un nombre doit s'exprimer sous la forme d'une suite finie de chiffres à la droite de la virgule pour que ce nombre soit considéré comme un nombre décimal. En d'autres termes, un nombre irrationnel ou un nombre rationnel avec une suite infinie et périodique de chiffres n'entre pas dans la définition de nombre décimal. La partie fractionnaire doit pouvoir s'exprimer en *fraction décimale*[4], c'est-à-dire en fraction équivalente dont le dénominateur est 10, 100, 1 000, etc.

4. Une *fraction décimale* est une fraction dont le dénominateur est un nombre représentant une puissance de 10. Ainsi, 10 est une puissance de 10 puisque 10×1 correspond à 10 à la puissance 1 ou 10 exposant 1; 100 est une puissance de 10 puisque 10×10 correspond à 10 à la puissance 2 ou 10 exposant 2 (les notions de puissance et d'exposants sont étudiées à la section 6). Les fractions dont les dénominateurs correspondent à 10, 100, 1 000 ou 10 000, par exemple, entrent dans la définition de fraction décimale.

Conversion des nombres décimaux en fractions

Chaque chiffre à la droite de la virgule représente une fraction. Puisque les chiffres après la virgule représentent des dixièmes, des centièmes ou des millièmes, soit une partie de 10, de 100 ou de 1 000, nous sommes en présence de fractions décimales. La figure 1.7 résume l'équivalence entre les chiffres à droite de la virgule d'un nombre décimal, c'est-à-dire sa partie décimale, et son expression sous forme de fraction décimale.

Figure 1.7
Les correspondances entre la partie décimale d'un nombre décimal et la fraction décimale

EXEMPLE :

8 765,439

8	7	6	5	,	4	3	9
↑	↑	↑	↑		↑	↑	↑
millier	|	|	|		|	|	millième
	centaine	|	|		|	centième	
		dizaine	unité		dixième		

Le premier chiffre à droite de la virgule représente des dixièmes, un chiffre par rapport à 10. Le dénominateur de la fraction décimale correspondante est 10.

Le deuxième chiffre à droite de la virgule représente des centièmes, un chiffre par rapport à 100. Le dénominateur de la fraction décimale correspondante est 100.

Le troisième chiffre à droite de la virgule représente des millièmes, un chiffre par rapport à 1 000. Le dénominateur de la fraction décimale correspondante est 1 000.

Le tableau suivant indique comment lire un nombre décimal et sa conversion en nombre fractionnaire.

Exemple : $\frac{7}{10}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{217}{1000}$.

Tableau 1.4
La lecture du nombre décimal 8 765,439

Le nombre est composé de deux parties :

Un nombre entier
8 milliers : 8 × 1 000 = 8 000 7 centaines : 7 × 100 = 700 6 dizaines : 6 × 10 = 60 5 unités : 5 × 1 = 5 8 000 + 700 + 60 + 5 = 8 765
Une fraction
4 dixièmes : 4 sur 10 : $\frac{4}{10}$ 3 centièmes : 3 sur 100 : $\frac{3}{100}$ 9 millièmes : 9 sur 1 000 : $\frac{9}{1\,000}$ $\frac{4}{10}+\frac{3}{100}+\frac{9}{1\,000}=\frac{400+30+9}{1\,000}=\frac{439}{1\,000}$ La fraction décimale $\frac{439}{1\,000}$ est équivalente à la partie décimale « ,439 ». Le nombre fractionnaire 8 765 $\frac{439}{1\,000}$ est équivalent au nombre décimal 8 765,439. On comprend maintenant pourquoi 8765,439 se prononce huit mille sept cent soixante-cinq et quatre cent trente-neuf millièmes.

EXEMPLE :

Quelle est la fraction qui correspond à 0,789?

SOLUTION

La fraction décimale correspondante est composée de la somme des fractions suivantes :

Le 1er chiffre 7 correspond à $\frac{7}{10}$.

Le 2^{e} chiffre 8 correspond à $\frac{8}{100}$.

Le 3^{e} chiffre 9 correspond à $\frac{9}{1\,000}$.

La fraction décimale équivalente correspond à la somme des fractions précédentes :

$$\frac{7}{10}+\frac{8}{100}+\frac{9}{1\,000}=\frac{700+80+9}{1\,000}=\frac{789}{1\,000}$$

EXEMPLE :

Quelle est la fraction qui correspond à 0,65?

SOLUTION

La fraction décimale correspondante est composée de la somme des fractions suivantes :

Le 1er chiffre 6 correspond à $\frac{6}{10}$.

Le 2^{e} chiffre 5 correspond à $\frac{5}{100}$.

La fraction décimale équivalente correspond à la somme des fractions précédentes :

$$\frac{6}{10}+\frac{5}{100}=\frac{60+5}{100}=\frac{65}{100}$$

Notez que la fraction $\frac{65}{100}$ est une fraction réductible puisque le numérateur et le dénominateur sont divisibles par 5. La fraction $\frac{13}{20}$ $\left(\frac{65\div5}{100\div5}\right)$ équivaut à $\frac{65}{100}$ ou à 0,65.

Une méthode rapide permet d'arriver au même résultat. Cette méthode sera détaillée au moment de la présentation de la multiplication des nombres décimaux.

EXEMPLE :

Quel est le nombre fractionnaire correspondant à 4,235?

SOLUTION

Le nombre entier du nombre décimal demeure le même nombre entier dans le nombre fractionnaire équivalent. La fraction décimale correspondant à la partie décimale du nombre décimal est composée de la somme des fractions suivantes :

Le 1er chiffre 2 correspond à $\frac{2}{10}$.

Le 2^{e} chiffre 3 correspond à $\frac{3}{100}$.

Le 3^{e} chiffre 5 correspond à $\frac{5}{1\,000}$.

La fraction décimale équivalente correspond à la somme des fractions précédentes :

$\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{5}{1\,000}=\frac{200+30+5}{1\,000}=\frac{235}{1\,000}$. Le nombre fractionnaire équivalent est $4\frac{235}{1\,000}$.

Notez que $\frac{235}{1\,000}$ est une fraction réductible puisque le numérateur et le dénominateur sont divisibles par 5. La fraction $\frac{47}{200}$ $\left(\frac{235 \div 5}{1\,000 \div 5}\right)$ équivaut à $\frac{235}{1\,000}$ ou à 0,235. Le nombre fractionnaire $4\frac{47}{200}$ équivaut à $4\frac{235}{1\,000}$ ou 4,235.

Les règles d'arrondissement des nombres

Il peut parfois être nécessaire d'évaluer grossièrement un résultat. Les nombres utilisés peuvent alors être arrondis. Ils peuvent l'être au centième le plus près, au dixième le plus près, à l'unité le plus près, à la dizaine la plus près ou à la centaine la plus près. Certaines règles existent à cet égard. C'est le nombre 5 qui sert de point de référence pour l'arrondissement. Les exemples consignés au tableau 1.5 de la page suivante expliquent les principales règles d'arrondissement des nombres.

Tableau 1.5
Les règles d'arrondissement des nombres

Pour arrondir au centième le plus près, le chiffre des millièmes sert de référence.
Si ce dernier est inférieur à 5, le chiffre des centièmes ne change pas. **EXEMPLE :** 16,444 devient 16,44 Si le chiffre des millièmes est supérieur ou égal à 5, le chiffre des centièmes augmente de 1. **EXEMPLE :** 16,446 devient 16,45

Pour arrondir au dixième le plus près, le chiffre des centièmes sert de référence.

Si ce dernier est inférieur à 5, le chiffre des dixièmes ne change pas.

EXEMPLE :

16,44 devient 16,4

Si le chiffre des centièmes est supérieur ou égal à 5, le chiffre des dixièmes augmente de 1.

EXEMPLE :

16,46 devient 16,5

Pour arrondir à l'unité le plus près, le chiffre des dixièmes sert de référence.

Si ce dernier est inférieur à 5, le chiffre des unités ne change pas.

EXEMPLE :

16,4 devient 16

Si le chiffre des dixièmes est supérieur ou égal à 5, le chiffre des unités augmente de 1.

EXEMPLE :

16,5 devient 17

Pour arrondir à la dizaine la plus près, le chiffre des unités sert de référence.

Si ce dernier est inférieur à 5, le chiffre des dizaines ne change pas.

EXEMPLE :

114 devient 110

Si le chiffre des unités est supérieur ou égal à 5, le chiffre des dizaines augmente de 1.

EXEMPLE :

416 devient 420
215 devient 220

Pour arrondir à la centaine la plus près, le chiffre des dizaines sert de référence.
Si ce dernier est inférieur à 5, le chiffre des centaines ne change pas. **EXEMPLE :** 6 146 devient 6 100 Si le chiffre des dizaines est supérieur ou égal à 5, le chiffre des centaines augmente de 1. **EXEMPLE :** 5 165 devient 5 200

Conversion de fractions en nombres décimaux

La conversion de nombres décimaux en fractions demande d'exprimer la partie décimale sous forme de fractions décimales dont le dénominateur équivaut à 10, 100 ou 1 000, etc., selon le nombre de chiffres à la droite de la virgule. Le contraire est également réalisable. L'expression fractionnaire peut être convertie en expression décimale. Une fraction est la division d'un numérateur par un dénominateur. L'équivalent décimal d'une fraction correspond au résultat de la division du numérateur par le dénominateur.

Le résultat est un nombre rationnel dont le développement décimal est périodique mais infini ou un nombre rationnel dont le développement décimal est limité. Seule cette dernière catégorie entre dans la définition de nombre décimal. On peut convertir une fraction en décimale (sans nécessairement être en présence d'un nombre décimal) en limitant le nombre de chiffres à la droite de la virgule. Par exemple, on peut souhaiter deux ou trois chiffres à la droite de la virgule. Le calcul de la conversion est présenté dans la section de la division des nombres décimaux.

Les opérations mathématiques sur les nombres décimaux

Au même titre que pour les fractions, les nombres décimaux peuvent s'additionner, se soustraire, se diviser ou se multiplier. L'emplacement de la virgule et le nombre de chiffres à la droite de la virgule influencent les résultats des opérations. L'ajout ou le retrait de « 0 » à la fin de la partie décimale ne change pas la valeur du résultat. Rappelons-nous, par exemple, que $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$ ou $0{,}1=0{,}10$.

L'addition des nombres décimaux

L'addition de nombres décimaux s'effectue de la même façon que l'addition de nombres entiers. L'emplacement de la virgule dans les opérations avec les nombres décimaux revêt une très grande importance. La somme dépend directement du respect de la position de la virgule. Les chiffres doivent être bien alignés. Les centaines sont placées en dessous des centaines comme les centièmes sont placés en dessous des centièmes. Ainsi, les centaines s'additionnent avec les centaines et les centièmes avec les centièmes. Les virgules doivent être bien alignées, au même titre que les chiffres. Les positions des chiffres et de la virgule demeurent les mêmes dans le résultat. Il est primordial d'aligner les nombres avant d'effectuer l'opération d'addition.

EXEMPLE :

Quelle est la somme de 25 et 52?

SOLUTION

$$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{+52} \\ 77 \end{array}$$

Les unités sont alignées avec les unités et les dizaines avec les dizaines. Par convention, la virgule des nombres entiers et les zéros à la droite de la virgule ne sont pas inscrits. L'opération précédente peut aussi s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{array}{r} 25{,}00 \\ \underline{+52{,}00} \\ 77{,}00 \end{array}$$

Le même raisonnement peut être appliqué aux nombres décimaux.

EXEMPLE :

Lors de leur pause au restaurant, les quatre amis de la mise en situation ont dépensé 3,79 $, 4,99 $ et 2,25 $ (sans tenir compte des taxes de vente). Quelle est la somme totale déboursée?

SOLUTION

La somme totale déboursée équivaut à :

$$\begin{array}{r} 3{,}79 \\ 4{,}99 \\ \underline{+\ 2{,}25} \\ 11{,}03\,\$ \end{array}$$

EXEMPLE :

Quelle est la somme de 25,5 et 52,89?

SOLUTION

$$\begin{array}{r} 25{,}5 \\ +52{,}89 \\ \hline 78{,}39 \end{array}$$

EXEMPLE :

Quelle est la somme de 0,81 et 54,753 et 1,4689?

SOLUTION

$$\begin{array}{r} 0{,}81 \\ 54{,}753 \\ +\,1{,}4689 \\ \hline 57{,}0319 \end{array}$$

La soustraction des nombres décimaux

La soustraction des nombres décimaux suit la même logique que l'addition de ces nombres. L'alignement des chiffres est important pour effectuer l'opération correctement. La position de la virgule conserve sa place dans la différence obtenue. Il est important d'ajouter des « 0 » pour que chaque colonne ait le même nombre de chiffres à la droite de la virgule afin d'effectuer l'opération.

EXEMPLE :

Quelle est la différence entre 52 et 25?

SOLUTION

$$\begin{array}{r} 52 \\ -25 \\ \hline 27 \end{array}$$

Les unités sont alignées avec les unités et les dizaines avec les dizaines. Par convention, la virgule des nombres entiers et les zéros à la droite de la virgule ne sont pas inscrits. Les chiffres à la droite de la virgule sont soustraits implicitement les uns des autres. L'opération précédente peut s'écrire aussi de la façon suivante :

$$\begin{array}{r} 52{,}00 \\ -25{,}00 \\ \hline 27{,}00 \end{array}$$

Appliquons le même raisonnement aux nombres décimaux.

EXEMPLE :

Quelle est la différence de prix entre le menu d'Andrée et celui de Nathalie, comparativement à celui de Philippe et Mathieu?

SOLUTION

$$\begin{array}{r} 4{,}99 \\ -3{,}79 \\ \hline 1{,}20\ \$ \end{array}$$

Le menu de Philippe et Mathieu coûte 1,20 $ de plus que le menu de Nathalie et Andrée.

EXEMPLE :

Quelle est la différence entre 52,89 et 25,5?

SOLUTION

$$\begin{array}{r} 52{,}89 \\ -25{,}5 \\ \hline ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 52{,}89 \\ -25{,}50 \\ \hline 27{,}39 \end{array}$$

Un zéro a été ajouté au nombre 25,5, mais la valeur du nombre demeure inchangée. Cet ajout permet d'équilibrer les deux termes afin d'effectuer la soustraction des centièmes avec les centièmes.

EXEMPLE :

Quelle est la différence entre 55 et 5,25?

SOLUTION

$$\begin{array}{r} 55 \\ -5{,}25 \\ \hline ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 55{,}00 \\ -\ 5{,}25 \\ \hline 49{,}75 \end{array}$$

EXEMPLE :

Quelle est la différence entre 54,753 et 0,81468?

SOLUTION

$$\begin{array}{r} 54{,}753 \\ -\ 0{,}81468 \\ \hline ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 54{,}75300 \\ -\ 00{,}81468 \\ \hline 53{,}93832 \end{array}$$

En résumé, pour additionner ou soustraire des nombres décimaux, il faut additionner ou soustraire les chiffres qui sont dans la même position. Ainsi, les millièmes sont additionnés ou soustraits avec les millièmes, les centièmes avec les centièmes tout comme les unités sont additionnées ou soustraites avec les unités et les dizaines avec les dizaines. L'opération s'effectue de la même manière qu'une opération de nombres entiers en respectant la position de la virgule.

La multiplication des nombres décimaux

La multiplication de nombres décimaux se traite comme la multiplication de nombres entiers. Le produit de l'opération dépendra du nombre de chiffres à la droite de la virgule, présents dans chacun des facteurs. Le nombre de chiffres à la droite de la virgule du résultat correspond à la somme du nombre de chiffres à la droite de la virgule à l'intérieur de chacun des nombres décimaux multipliés.

EXEMPLE :

Quel est le produit de 25,25 par 3,12?

SOLUTION

$$\begin{array}{r} 25{,}25 \\ \times\ 3{,}12 \\ \hline \end{array}$$ (2 chiffres à la droite de la virgule) (2 chiffres à la droite de la virgule)

$$\begin{array}{r} 5050 \\ 2525 \\ 7575 \\ \hline 787800 \end{array}$$

$78780{,}0$

$7878{,}00$

$787{,}800$

$78{,}7800$

$78{,}78$

Le nombre de déplacements de la virgule vers la gauche afin d'établir son emplacement dans le produit dépend de la somme des chiffres à la droite de la virgule dans les nombres multipliés : $2+2$. Le résultat aura 4 chiffres à la droite de la virgule, alors il faut déplacer la virgule (non inscrite par convention) de quatre positions vers la gauche. L'élimination des « 0 » n'affecte pas la valeur du résultat et allège la présentation du nombre.

EXEMPLE :

Quel est le produit de 0,5 par 48?

SOLUTION

$$\begin{array}{r} 0{,}5 \\ \times 48 \\ \hline 40 \\ 20 \\ \hline 240 \end{array}$$

$24{,}0$

24

On note que le total de chiffres à la droite de la virgule dans les nombres multipliés est 1 : $(1+0)$. Le résultat aura un chiffre à la droite de la virgule. Le déplacement d'une position de la virgule vers la gauche est nécessaire. Par convention, le zéro est éliminé ainsi que la virgule pour les nombres entiers.

Pour multiplier un nombre décimal par 10, 100, 1 000, etc., le déplacement de la virgule vers la droite est suffisant pour établir le résultat de l'opération. Le nombre de déplacements correspond au nombre de « 0 » dans le nombre à multiplier.

EXEMPLE :

Quel est le résultat de $10 \times 5{,}6789$?

SOLUTION

10 : le nombre « 10 » a un « 0 ». Un déplacement de la virgule vers la droite est exigé.

Réponse : 56,789

Preuve :

$$\begin{array}{r} 5{,}6789 \\ \times 10 \\ \hline 00000 \\ 56789 \\ \hline 567890 \end{array}$$ (4 chiffres à droite de la virgule)

Le nombre de chiffres à la droite de la virgule dans le résultat égale la somme des chiffres à la droite de la virgule à l'intérieur des nombres multipliés : $4+0=4$ chiffres à la droite de la virgule dans le résultat. Il faut déplacer la virgule actuelle (non inscrite par convention) de quatre positions vers la gauche.

$56{,}7890$
$56{,}789$

Le « 0 » ne change pas la valeur du résultat. Il est éliminé pour alléger la présentation du nombre.

EXEMPLE :

Quel est le résultat de $100 \times 5{,}6789$?

SOLUTION

100 : le nombre « 100 » a deux « 0 ». Deux déplacements de la virgule vers la droite sont exigés.

Réponse : 567,89

Preuve :

$$
\begin{array}{r}
5,6789 \\
\underline{\times 100} \\
00000 \\
00000 \\
\underline{56789} \\
5678900
\end{array}
$$

Le nombre de décimales à la droite de la virgule à l'intérieur des nombres multipliés est égal à 4. Alors il faut déplacer la virgule de quatre positions vers la gauche pour obtenir le produit.

567,8900
567,89

Cette méthode de calcul basée sur les déplacements de la virgule sert aussi pour la conversion d'un nombre décimal en fraction. Cette méthode s'appuie sur le nombre de chiffres à la droite de la virgule pour déterminer le nombre de « 0 » du dénominateur correspondant. Le tableau 1.6 résume cette méthode.

Tableau 1.6
Une méthode rapide de calcul pour convertir la partie décimale d'un nombre décimal en fraction décimale

Le nombre de chiffres à la droite de la virgule détermine le nombre de « 0 » du dénominateur et le nombre de déplacements de la virgule pour établir la valeur du numérateur :

– un chiffre à la droite de la virgule : déplacement de la virgule d'une position. Le chiffre obtenu correspond au numérateur de la nouvelle fraction, après un déplacement de la virgule. Le dénominateur correspond à 10, soit un « 0 », soit le nombre de chiffres à la droite de la virgule.
– deux chiffres à la droite de la virgule : déplacement de la virgule de deux positions. Le chiffre obtenu correspond au numérateur de la nouvelle fraction, après deux déplacements de la virgule. Le dénominateur correspond à 100, soit deux « 0 », soit le nombre de chiffres à la droite de la virgule.
– trois chiffres à la droite de la virgule : déplacement de la virgule de trois positions. Le chiffre obtenu correspond au numérateur de la nouvelle fraction, après trois déplacements de la virgule. Le dénominateur correspond à 1 000, soit trois « 0 », soit le nombre de chiffres à la droite de la virgule.

EXEMPLE :

Quelle est la fraction correspondant à 0,789?

SOLUTION

0,789 comprend trois chiffres à la droite de la virgule.

Déplacement de la virgule de trois positions : 789 correspond au numérateur de la nouvelle fraction.

Le dénominateur correspondant sera égal à 1 000, soit trois « 0 », soit trois chiffres à la droite de la virgule : $\frac{789}{1\,00}$.

ou

$0,789 = \frac{0,789}{1} = \frac{0,789 \times 1\,000}{1 \times 1\,000} = \frac{789}{1\,000}$, trois chiffres à la droite de la virgule :

dénominateur = 1 et trois « 0 ».

EXEMPLE :

Quelle est la fraction correspondant à 0,65?

SOLUTION

0,65 comprend deux chiffres à la droite de la virgule.

Déplacement de la virgule de deux positions : 65 correspond au numérateur de la nouvelle fraction.

Le dénominateur correspondant sera égal à 100, soit deux « 0 », soit deux chiffres à la droite de la virgule : $\frac{65}{100}$.

ou

$0,65 = \frac{0,65}{1} = \frac{0,65 \times 100}{1 \times 100} = \frac{65}{100}$, 2 chiffres à la droite de la virgule : dénominateur = 1 et deux « 0 ».

La fraction équivalente est $\frac{65}{100}$ qui peut être réduite à $\frac{13}{20}$.

EXEMPLE :

Quel est le nombre fractionnaire correspondant à 4,235?

SOLUTION

4,235 comprend trois chiffres à la droite de la virgule.

Déplacement de la virgule de trois positions : 235 correspond au numérateur de la nouvelle fraction.

Le dénominateur correspondant sera égal à 1 000, soit trois « 0 », soit trois chiffres à la droite de la virgule.

Le nombre fractionnaire équivalent est $4\frac{235}{1\,000}$.

ou

$0,235=\frac{0,235}{1}=\frac{0,235\times 1\,000}{1\times 1\,000}=\frac{235}{1\,000}$, trois chiffres à la droite de la virgule : dénominateur = 1 et trois « 0 ». Le nombre fractionnaire équivalent est $4\frac{235}{1\,000}$.

On s'aperçoit que la multiplication de la partie décimale par 10, 100, 1 000, etc., nous donne la fraction correspondante. La multiplication par 10, 100, 1 000, etc., se traduit par le déplacement de la virgule d'une, deux, trois positions ou plus vers la droite.

La division des nombres décimaux

Les principes régissant les opérations des nombres entiers s'appliquent aussi pour la division des nombres décimaux. L'emplacement de la virgule doit être vérifié en cours d'opération pour ne pas fausser le résultat.

La règle générale veut que les termes soient exprimés en nombres entiers. Pour ramener un nombre décimal en nombre entier, la multiplication des termes par 10, 100 ou 1 000 est nécessaire. Les deux termes de la division sont multipliés par le même nombre pour conserver le même rapport entre les deux. En termes courants, on dit qu'il faut que le nombre de chiffres à la droite de la virgule du dividende et du diviseur soit identique.

Pour s'assurer de l'égalité du nombre de chiffres à la droite des deux termes, il suffit d'ajouter des « 0 » à la droite des décimales du terme. Ajouter des « 0 » sous-entend que le terme est multiplié par 10, 100 ou 1 000, par exemple. En rendant les termes comparables au niveau du nombre de décimales, la virgule est éliminée. L'élimination de la virgule sous-entend également que ce terme a aussi été multiplié par le même nombre 10, 100 ou 1 000. Les deux termes sont alors multipliés par le même nombre. Les termes sont comparables, la virgule est éliminée (par convention puisque les termes sont ainsi exprimés en nombres entiers) et la division, comme avec des nombres entiers, est possible. Pour poursuivre l'opération de division, il peut être nécessaire d'ajouter des « 0 » au dividende. L'ajout des « 0 » commande et fixe l'emplacement de la virgule dans le quotient.

Voici la démonstration complète de la division d'un nombre décimal par un nombre entier.

Remarque : pour les exemples suivants, on utilise une méthode de division qui n'est peut-être pas celle que vous avez utilisée lorsque vous étiez écolier. Il n'est pas nécessaire pour le cours MQT 1001 que vous appreniez cette deuxième méthode. Effectuez donc les divisions comme vous l'avez appris plus jeune et vérifiez que le résultat est le même. De plus, nous vivons à une époque où toute opération numérique devrait être vérifiée par un moyen technologique : calculatrice, tablette, ordinateur ou autre. Ne vous en privez pas. Par contre, pour les déplacements de la virgule, cela ne dépend pas de votre technique de division.

EXEMPLE :

Quel est le quotient de 293,379 divisé par 57?

SOLUTION

```
57  )293,379
```

```
          5
57  )293,379
      285
        8
```

Pour poursuivre l'opération, il faut se servir des chiffres à la droite de la virgule. Le fait de traverser l'autre côté de la virgule établit la position de la virgule dans le quotient. L'opération continue en confirmant la présence de la virgule après le nombre entier, et en utilisant les chiffres à la droite de la virgule dans le dividende.

```
         5,
57  )293,379
      285
        8 3
```

```
         5,1
57  )293,379
      285
        8 3
        5 7
        2 6
```

$$
\begin{array}{rr}
 & 5,147 \\
57 & \overline{)293,379} \\
 & \underline{285} \\
 & 8\;3 \\
 & \underline{5\;7} \\
 & 2\;67 \\
 & \underline{2\;28} \\
 & 399 \\
 & \underline{399} \\
 & 0
\end{array}
$$

Le quotient de 293,379 divisé par 57 correspond à 5,147. Cette réponse confirme ce qui a été établi précédemment concernant le nombre de décimales du produit. Les deux facteurs, 57 et 5,147, totalisent trois chiffres à la droite de la virgule. Le produit 293,379 totalise trois chiffres à la droite de la virgule. Si la somme du nombre de décimales des facteurs correspond au nombre de décimales du produit, la différence entre le nombre de décimales du dividende et du diviseur correspond au nombre de décimales du quotient. Cette affirmation est vérifiable avant que les zéros non pertinents figurant à la fin de la partie décimale soient éliminés.

L'opération précédente (293,379 divisé par 57) peut aussi s'effectuer selon la règle générale qui veut que les termes soient exprimés en nombres entiers. L'ajout de « 0 » à la droite des décimales permet d'équilibrer les deux nombres en fonction du nombre de chiffres après la virgule. La division est plus difficile à évaluer puisque les termes viennent d'être multipliés par 10, 100 ou 1 000. Leurs valeurs sont plus importantes.

$$
57\;\overline{)293,379}
$$

$$
293,379 \times 1\,000 = 293\,379
$$
$$
57 \times 1\,000 = 57\,000
$$

$$
57000\;\overline{)293379}
$$

Les décimales sont éliminées. L'opération se poursuit comme une opération avec des nombres entiers.

$$
\begin{array}{rr}
 & 5 \\
57000 & \overline{)293379} \\
 & \underline{285000} \\
 & 8379
\end{array}
$$

Pour poursuivre l'opération, il faut ajouter un « 0 » au dividende. L'ajout des « 0 » détermine l'emplacement de la virgule dans le quotient.

$$
\begin{array}{rr}
 & 5, \\
57000 & \overline{)293379} \\
 & \underline{285000} \\
 & 83790
\end{array}
$$

```
             5,1
57000  )293379
        285000
           83790
           57000
           26790
```

Pour poursuivre l'opération, il faut ajouter un « 0 » au dividende.

```
             5,1
57000  )293379
        285000
           83790
           57000
           267900
```

```
            5,14
57000  )293379
        285000
           83790
           57000
           267900
           228000
            39900
```

Pour poursuivre l'opération, il faut ajouter un « 0 » au dividende.

```
            5,14
57000  )293379
        285000
           83790
           57000
           267900
           228000
            399000
```

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5{,}147 \\
\hline
57000 & 293379 \\
 & \underline{285000} \\
 & \quad 83790 \\
 & \quad \underline{57000} \\
 & \quad 267900 \\
 & \quad \underline{228000} \\
 & \qquad 399000 \\
 & \qquad \underline{399000} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Le résultat est le même.

D'autres méthodes de travail sont utilisées. Celles-ci varient suivant la situation : le diviseur peut être un nombre décimal; les deux termes peuvent être des nombres décimaux; les deux termes sont des nombres entiers mais le quotient peut être un nombre décimal; le diviseur est 10 ou un multiple de 10.

Les opérations mathématiques et la calculatrice

La fraction a été présentée comme le quotient d'une division. Ainsi, le nombre 12 provient de la division de 12 par 1, $\frac{12}{1}$, dont le résultat est 12. Le même raisonnement vaut pour $\frac{3}{4}$ et $5\frac{1}{3}$. Si les résultats des opérations des fractions sont établis à l'aide d'une calculatrice, chaque fraction doit être saisie comme une division : $\frac{3}{4}$ correspond à $3 \div 4$. Le résultat sera un nombre décimal ou une suite infinie de chiffres à la droite de la virgule. Ce dernier résultat servira à calculer l'opération demandée sur les fractions. En d'autres termes, les fractions sont converties en expressions décimales par la calculatrice. Après conversion, les opérations mathématiques initialement prévues pour les fractions sont appliquées aux quotients des fractions.

EXEMPLE :

Quelle est la somme de $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$?

SOLUTION

Manuellement, $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{4+5}{20}=\frac{9}{20}$

À l'aide de la calculatrice, l'opération $1 \div 5$ sera effectuée en premier. Le résultat sera un nombre décimal : 0,20. L'opération $1 \div 4$ sera ensuite calculée. Le résultat sera un autre nombre décimal : 0,25. Les deux nombres décimaux, provenant de la conversion des fractions en nombres décimaux, seront additionnés : $0{,}20+0{,}25=0{,}45$. Le résultat pourrait être réexprimé en fraction, si désiré : $\frac{45}{100}$ ou $\frac{9}{20}$.

N'hésitez pas à utiliser votre calculatrice pour vérifier vos calculs arithmétiques. Voici quelques recommandations à ce sujet :

D'abord, faites une approximation de votre réponse; ayez une idée générale de la réponse. Si vous multipliez 399 par 28, sachez avant de commencer à inscrire les chiffres sur le clavier que votre réponse sera aux alentours de 12 000 (400 x 30) et si votre calculatrice vous donne comme réponse 1 092, vous saurez que vous avez mal inscrit ou pas inscrit du tout un des chiffres de la multiplication.

Si vous avez plusieurs opérations dans le même problème, ne réécrivez pas les premières réponses que vous avez obtenues pour faire les autres opérations. Gardez tous les chiffres en utilisant la mémoire si nécessaire. Le fait d'arrondir les nombres multiplie les erreurs que l'on fait en arrondissant. Par exemple, si vous devez faire la multiplication suivante : $\sqrt{2} \times \sqrt{72}$, votre calculatrice vous donnera $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ et $\sqrt{72} = 8{,}485281374$. Si vous mettez le premier résultat en mémoire et multipliez le deuxième résultat par la valeur que vous avez mise en mémoire, vous obtiendrez : 12. Mais si vous tapez 1,414 x 8,485, la machine vous donnera comme résultat : 11,99779. C'est proche, mais ce n'est pas pareil. Si la question était « donnez le résultat exact », vous ne pourriez obtenir tous les points.

Réfléchissez avant de taper. La calculatrice ne sait pas quel calcul vous désirez faire. C'est vous qui le lui dites. Si vous ne le faites pas correctement, vous ne pourrez obtenir la bonne réponse. Parfois, il vous faudra ajouter des parenthèses pour obtenir le calcul désiré. Par exemple, pour évaluer : $\frac{6}{2+13}$, si vous tapez 6/2 + 13, vous obtiendrez 3 + 13 = 16; alors qu'il fallait entrer : 6/(2 + 13) qui donne la bonne réponse, soit 0,4, car la barre de fraction agit comme une parenthèse.

Certaines calculatrices permettent de transformer un nombre décimal en fraction ordinaire, mais toutes les calculatrices font le contraire : on n'a qu'à diviser le numérateur par le dénominateur pour obtenir la fraction décimale. Vérifiez si votre calculatrice possède la fonction de transformer un nombre décimal en fraction.

NOTE : Faites les exercices de la section 4 dans le *Recueil des activités pratiques* avant de continuer la lecture.

Section 5 : les pourcentages

Dans le mot pourcentage, nous reconnaissons le mot cent. Le pourcentage est une autre façon d'évaluer une partie d'un tout, un tout exprimé en centième. Le pourcentage est un rapport, une fraction dont le dénominateur est égal à 100. Les pourcentages sont utilisés pour calculer, entre autres, le rendement des placements, les frais d'intérêt des emprunts, les impôts à payer, les rabais sur les produits, la marge bénéficiaire brute sur un produit, les taxes à la consommation. Bien que la liste d'applications des pourcentages ne se limite pas à l'énumération précédente, nous nous attarderons à certaines de celles-ci.

Le pourcentage est un rapport. Une fraction est un rapport. Un nombre décimal est un rapport. Tous ces termes sont interreliés. Ce sont des manières différentes d'exprimer différents rapports. Dans cette section, nous pourrons mettre en évidence ces équivalences puisque chaque notion aura été étudiée.

La règle générale prévoit une multiplication du terme par 100 pour trouver son équivalence en pourcentage et une division par 100 pour ramener le pourcentage sous forme de fraction décimale.

Conversion de nombres décimaux en pourcentage

Pour convertir les nombres décimaux en pourcentage, il suffit de multiplier ce nombre par 100 et d'ajouter le symbole « % » à la fin du résultat; il signifie « divisé par cent ou « sur cent » et se lit « pour cent ». Une multiplication par 100 déplace la virgule de deux positions vers la droite.

EXEMPLES :

Convertir les nombres décimaux suivants en pourcentage :

1. $0{,}75 \Rightarrow 0{,}75 \times 100 = 75 \Rightarrow 75\,\%$
2. $0{,}075 \Rightarrow 0{,}075 \times 100 = 7{,}5 \Rightarrow 7{,}5\,\%$
3. $7{,}5 \Rightarrow 7{,}5 \times 100 = 750 \Rightarrow 750\,\%$

Conversion de fractions en pourcentage

Si le dénominateur de la fraction est 100, l'opération est assez simple. Un pourcentage est une fraction avec un dénominateur égal à 100. On remplace le dénominateur 100 par le signe « % ». Si le dénominateur de la fraction est différent de 100, la fraction est convertie en nombre décimal et le résultat est multiplié par 100. Cette conversion de la fraction en nombre décimal (c'est-à-dire la division du numérateur par le dénominateur) avant la multiplication par 100 allège l'opération. La fraction peut aussi être multipliée directement par 100. Le raisonnement est le même peu importe la manière utilisée : la fraction est multipliée par 100.

EXEMPLES :

Convertir les fractions suivantes en pourcentage :

1. $\frac{50}{100} \Rightarrow 50\,\%$ ou $\frac{50}{100} \times 100 = 50 \Rightarrow 50\,\%$ ou $50 \div 100 = 0{,}5 \quad 0{,}5 \times 100 = 50 \Rightarrow 50\,\%$

2. $\frac{3}{20} \Rightarrow \frac{3}{20}\times\frac{100}{1} = 3\times 5 = 15 \Rightarrow 15\,\%$ ou $3\div 20 = 0{,}15 \quad 0{,}15\times 100 = 15 \Rightarrow 15\,\%$
3. $\frac{426}{1\,000} \Rightarrow \frac{426}{1\,000}\times\frac{100}{1} = \frac{426}{10} = 426\div 10 = 42{,}6 \Rightarrow 42{,}6\,\%$ ou $426\div 1\,000 = 0{,}426 \quad 0{,}426\times 100 = 42{,}6 \Rightarrow 42{,}6\,\%$
4. $\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}\times\frac{100}{1} = 4\times 20 = 80 \Rightarrow 80\,\%$ ou $4\div 5 = 0{,}8 \quad 0{,}8\times 100 = 80 \Rightarrow 80\,\%$

Dans le dernier exemple, les opérations mathématiques sont les mêmes que pour les trois premiers mais l'ordre est différent :

1. $\frac{4}{5}\times 100 \Rightarrow$ La multiplication par 100 est établie au début de l'opération. On simplifie les termes avant la multiplication : $100\div 5 = 20$, alors $4\times 20 = 80$.
2. $4\div 5 = 0{,}8 \Rightarrow$ On procède à la division des termes de la fraction avant la multiplication par 100 : $0{,}8\times 100 = 80$.

Le résultat est le même puisque la multiplication et la division ont la même priorité.

EXEMPLE :

Exprimer $\frac{3}{4}$ en pourcentage.

SOLUTIONS

1. $\frac{3}{4} \Rightarrow 3\div 4 = 0{,}75 \quad 0{,}75\times 100 = 75 \Rightarrow 75\,\%$

OU

2. $\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}\times 100 = 3\times 25 = 75 \Rightarrow 75\,\%$

OU

3. On pourrait procéder de la façon suivante : par quel nombre faudrait-il multiplier 3 et 4 pour obtenir 100 comme dénominateur?
   $\frac{3}{4}\times\frac{25}{25} = \frac{75}{100} = 75\,\%$

Cet exemple démontre les manipulations possibles et les équivalences entre les rapports. Si vous êtes plus ou moins à l'aise avec ces équivalences, la division du numérateur par le dénominateur et la multiplication du résultat par 100 minimiseront le risque d'erreur.

Conversion de pourcentages en nombres décimaux

Pour convertir un nombre décimal en pourcentage, on multiplie par 100. La conversion d'un pourcentage en nombre décimal est l'opération contraire, on divise donc par 100. L'opération est logique puisqu'un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est égal à 100. L'expression d'une fraction en décimale commande la division du numérateur par le dénominateur, d'où la division par 100. Un déplacement de deux positions vers la gauche divise le nombre par 100. S'il n'y a pas assez de chiffres pour absorber les déplacements, un ou des « 0 » sont ajoutés.

EXEMPLES :

Convertir les pourcentages suivants en nombres décimaux :

$4\,\% \Rightarrow 4 \div 100 = 0{,}04$

$10\,\% \Rightarrow 10 \div 100 = 0{,}1$

$125\,\% \Rightarrow 125 \div 100 = 1{,}25$

Conversion de pourcentages en fractions

Un pourcentage est une fraction ayant un dénominateur 100. On peut remplacer le pourcentage par un dénominateur 100 et le tour est joué. La méthode la plus sûre est de convertir d'abord le pourcentage en nombre décimal puis le nombre décimal en fraction. La fraction doit bien sûr être réduite à sa plus simple expression.

EXEMPLES :

Convertir les pourcentages suivants en fractions :

1. $75\,\% \Rightarrow 75 \div 100 = 0{,}75$

   $$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{75}{100} \div \frac{25}{25} = \frac{3}{4}$$

   ou

   $$75\,\% \Rightarrow \frac{75}{100} = \frac{75 \div 25}{100 \div 25} = \frac{3}{4}$$

2. $125\,\% \Rightarrow 125 \div 100 = 1{,}25$

$$1{,}25 = 1\frac{25}{100} = 1\frac{25 \div 25}{100 \div 25} = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

ou

$$125\,\% \Rightarrow \frac{125}{100} = \frac{125 \div 25}{100 \div 25} = \frac{5}{4}$$

3. $5{,}5\,\% \Rightarrow 5{,}5 \div 100 = 0{,}055$

$$0{,}055 = \frac{55}{1\,000} = \frac{55 \div 5}{1\,000 \div 5} = \frac{11}{200}$$

ou

$$5{,}5\,\% \Rightarrow \frac{5{,}5}{100} = \frac{5{,}5 \times 10}{100 \times 10} = \frac{55}{1\,000} = \frac{55 \div 5}{1\,000 \div 5} = \frac{11}{200}$$

Résumé des conversions

Nous avons souligné à plusieurs reprises le lien direct entre les fractions, les nombres décimaux et les pourcentages. Nous vous présentons au tableau 1.7 un résumé des conversions d'un rapport à un autre.

Tableau 1.7
Un résumé des conversions entre les fractions, les nombres décimaux et les pourcentages

Conversion d'une fraction en nombre décimal :	diviser le numérateur par le dénominateur. **EXEMPLE :** $\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0{,}75$
Conversion d'une fraction en pourcentage :	diviser le numérateur par le dénominateur et multiplier le résultat par 100. La multiplication par 100 suppose deux déplacements de la virgule vers la droite. **EXEMPLE :** $\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0{,}75 \times 100 = 75\,\%$

Conversion d'un nombre décimal en fraction :	tenir compte du nombre de chiffres à la droite de la virgule pour déterminer le dénominateur de la fraction : 10, 100, 1 000, etc. Réduire la fraction à sa plus simple expression. **EXEMPLE :** $0{,}75=\frac{75}{100}=\frac{75\div 25}{100\div 25}=\frac{3}{4}$
Conversion d'un nombre décimal en pourcentage :	multiplier le nombre par 100. La multiplication par 100 suppose deux déplacements de la virgule vers la droite. **EXEMPLE :** $0{,}75\times 100=75\,\%$
Conversion d'un pourcentage en nombre décimal :	diviser le nombre par 100. La division par 100 suppose deux déplacements de la virgule vers la gauche. **EXEMPLE :** $75\,\%=75\div 100=0{,}75$
Conversion d'un pourcentage en fraction :	convertir le pourcentage en nombre décimal et le nombre décimal en fraction. **EXEMPLE :** $75\,\%=75\div 100=0{,}75$ $0{,}75=\frac{75}{100}=\frac{75\div 25}{100\div 25}=\frac{3}{4}$

Le tableau 1.8 vous présente quelques équivalences des rapports les plus fréquemment utilisés.

Tableau 1.8
Tableau d'équivalence fraction, nombre décimal et pourcentage

Fraction	Nombre décimal	Pourcentage	Fraction	Nombre décimal	Pourcentage
$\frac{1}{100}$	0,01	1 %	$\frac{1}{3}$	$0,\overline{3}$	33,333 %
$\frac{1}{50}$	0,02	2 %	$\frac{1}{2}$	0,5	50 %
$\frac{1}{40}$	0,025	2,5 %	$\frac{3}{5}$	0,6	60 %
$\frac{1}{25}$	0,04	4 %	$\frac{5}{8}$	0,625	62,5 %
$\frac{1}{20}$	0,05	5 %	$\frac{2}{3}$	$0,\overline{6}$	66,667 %
$\frac{1}{16}$	0,0625	6,25 %	$\frac{3}{4}$	0,75	75 %
$\frac{1}{10}$	0,1	10 %	$\frac{4}{5}$	0,8	80 %
$\frac{1}{8}$	0,125	12,5 %	$\frac{7}{8}$	0,875	87,5 %
$\frac{1}{6}$	$0,1\overline{6}$	16,667 %	$\frac{100}{100}$	1,0	100 %
$\frac{1}{5}$	0,2	20 %	$\frac{5}{4}$	1,25	125 %
$\frac{1}{4}$	0,25	25 %	$\frac{3}{2}$	1,5	150 %

Les opérations mathématiques sur les pourcentages

Les pourcentages peuvent s'additionner, se soustraire et, après transformation en décimales, se multiplier et se diviser. Les situations suivantes démontrent des exemples d'application de ces opérations mathématiques.

EXEMPLE :

François détient 10 % des actions de catégorie A de la société AA. Martin en détient 20 % et Pierre, 15 %.

1. Quel pourcentage des actions de catégorie A est détenu par les trois actionnaires?

RÉPONSE

$$10\,\% + 20\,\% + 15\,\% = 45\,\%$$

2. Quelle est la différence entre le taux de participation de Martin et François dans la société AA?

RÉPONSE

$20\,\% - 10\,\% = 10\,\%$

3. François veut se départir de 50 % de sa participation qui est de 10 %. Quel pourcentage des actions de la société François veut-il vendre?

RÉPONSE

$$50\,\% \times 10\,\% = \frac{50}{100} \times \frac{10}{100} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{20} \times 100 = 5 \Rightarrow 5\,\%$$

4. Pierre veut partager ses actions avec ses deux fils. Après la transaction, tous trois doivent avoir le même pourcentage d'actions. Quel sera le pourcentage de participation de chacun dans la société?

RÉPONSE

$$15\,\% \div 3 = 5\,\% \quad \text{ou} \quad \frac{15}{100} \div 3 = \frac{15}{100} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{100} = 5\,\%$$

Les opérations mathématiques avec des pourcentages

On peut vouloir calculer un certain pourcentage d'un nombre. Il suffit de multiplier ce nombre par le pourcentage recherché.

EXEMPLE :

Que représente 25 % de 20?

SOLUTION

$$25\,\% \times 20 = \frac{25}{100} \times 20 = \frac{25}{5} = 5$$

Les déplacements de la virgule permettent d'effectuer rapidement l'opération si le pourcentage recherché est 1 % ou 10 %.

EXEMPLE :

Que représente 1 % de 450?

SOLUTION

$1\,\% = \frac{1}{100}$, une division par 100 est nécessaire. Une division par 100 se traduit par deux déplacements de la virgule vers la gauche.

$1\,\% \text{ de } 450 = 4{,}50 = 4{,}5$

ou

$1\,\% \text{ de } 450 = \frac{1}{100} \times 450 = \frac{9}{2} = 9 \div 2 = 4{,}5$

EXEMPLE :

Que représente 10 % de 450?

SOLUTION

$10\,\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, une division par 10 est nécessaire. Une division par 10 se traduit par un déplacement de la virgule vers la gauche.

$10\,\% \text{ de } 450 = 45{,}0 = 45$

ou

$10\,\% \text{ de } 450 = \frac{10}{100} \times 450 = 1 \times 45 = 45$

Calculer 10 % ou 1 % d'un nombre est plus facile et plus rapide. Le déplacement de la virgule d'une ou deux positions vers la gauche donne le résultat instantanément. Pour faciliter les calculs, on peut se servir de ces notions en décomposant le pourcentage recherché en multiple de 1 et 10.

EXEMPLE :

Que représente 30 % de 60?

SOLUTION

$30\,\% = 3 \times 10\,\%$

$10\,\% \text{ de } 60 \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, une division par 10 est nécessaire. Une division par 10 se traduit par un déplacement de la virgule vers la gauche.

$10\,\% \text{ de } 60 = 6{,}0 = 6$

30 % correspond à 3 fois 10 %, alors $30\,\% \text{ de } 60 = 3 \times 6 = 18$.

Augmentation ou diminution de pourcentage

Pour différentes raisons, nous voulons connaître le pourcentage d'augmentation ou de diminution entre deux nombres : quel est le pourcentage d'augmentation salariale? Le pourcentage d'augmentation de la valeur de la maison familiale? Le pourcentage de diminution de prix de vente? Pour connaître le pourcentage d'augmentation ou de diminution entre deux nombres, il faut établir la variation entre les deux nombres. Cette variation est comparée au nombre initial et ce rapport est multiplié par 100 pour l'exprimer en pourcentage.

EXEMPLE :

La maison de la famille Boisvert est évaluée à 198 000 $. L'an dernier, l'évaluation se chiffrait à 180 000 $. Quel est le pourcentage d'augmentation de l'évaluation de la maison?

SOLUTION

$$\frac{198\,000\,\$ - 180\,000\,\$}{180\,000\,\$} = \frac{18\,000\,\$}{180\,000\,\$} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \times 100 = 10\ \%$$

10 % d'augmentation par rapport à l'année dernière.

EXEMPLE :

L'état des résultats de l'entreprise LeBrun montre des ventes évaluées à 162 000 $ pour l'exercice courant. L'exercice antérieur révélait des ventes de l'ordre de 180 000 $. Quel est le pourcentage de diminution des ventes de l'exercice?

SOLUTION

$$\frac{180\,000\,\$ - 162\,000\,\$}{180\,000\,\$} = \frac{18\,000\,\$}{180\,000\,\$} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \times 100 = 10\ \%$$

10 % de diminution par rapport à l'année dernière.

Rapport supérieur à 100 %

Normalement, le pourcentage varie entre 1 et 100 %. Un placement génère 8 % d'intérêt. Un produit est réduit de 25 %. Mais il peut arriver que le pourcentage puisse être supérieur à 100 : un bon de placement peut rapporter 125 %; un immeuble peut se vendre à 110 % de son évaluation municipale.

EXEMPLE :

Le stationnement du centre commercial est utilisé à 105 %. Il compte 2 000 espaces de stationnement. À combien peut-on évaluer le nombre de véhicules?

SOLUTION

$$2\,000 \times 105\,\% = 2\,000 \times \frac{105}{100} = 20 \times 105 = 2\,100$$

EXEMPLE :

Le festival de musique du village avait attiré 20 000 spectateurs l'an dernier. Cette année, environ 120 % de la foule de l'an passée s'est présentée au festival. Quelle en a été l'assistance cette année?

SOLUTION

$20\,000\,\$ \times 120\,\% = 20\,000\,\$ \times \frac{120}{100} = 200 \times 120 = 24\,000$ personnes.

Applications particulières du pourcentage

Taux de rendement sur placement

Le taux de rendement est le pourcentage de profit par rapport à l'investissement ou au coût d'achat. Le taux de rendement est un pourcentage appliqué au capital investi. La multiplication du pourcentage avec le capital, le produit, représente le revenu généré par le placement. À moins que ce ne soit spécifiquement indiqué, les taux d'intérêt sont annuels. Souvent, les taux sont une donnée connue. Dans d'autres situations, le capital initial, le capital final ou le revenu d'intérêt désiré sont connus. La question se situe au niveau du taux d'intérêt recherché pour atteindre l'objectif désiré. Nous répondrons à cette dernière question au module 3 au moment de la manipulation et de la résolution d'équations.

EXEMPLE :

Un capital de 20 000 $ est investi dans un placement rapportant 6 % annuellement. Quels sont les intérêts générés annuellement par ce capital?

RÉPONSE

$20\,000\,\$ \times 6\,\% = 20\,000\,\$ \times \frac{6}{100} = 200 \times 6 = 1\,200\,\$$ par année.

Quels sont les intérêts générés après 10 mois?

RÉPONSE

$$20\,000\,\$ \times 6\,\% \times \frac{10}{12} = 20\,000\,\$ \times \frac{6}{100} \times \frac{10}{12} = 200 \times 5 = 1\,000\,\$.$$

En finance, on parle d'intérêt simple et d'intérêt composé. Les intérêts simples se calculent toujours sur le même capital, le capital initial. En se référant à l'exemple précédent, l'an prochain les intérêts se calculeront sur 20 000 $. Les intérêts gagnés pour la deuxième année, ainsi que pour les années suivantes, seront de 1 200 $ par année : $20\,000\,\$ \times 6\,\% = 1\,200\,\$$.

Les intérêts composés se calculent sur le capital initial et les intérêts réinvestis. Le capital augmente année après année ainsi que le revenu qu'il génère. En se référant à l'exemple précédent et en supposant que les intérêts sont réinvestis, les intérêts de la deuxième année se calculeront de la façon suivante :

Nouveau capital au début de la deuxième année : $20\,000\,\$ + 1\,200\,\$ = 21\,200\,\$$

Les intérêts de la deuxième année se calculent sur ce nouveau solde :

$$21\,200\,\$ \times 6\,\% = 21\,200\,\$ \times \frac{6}{100} = 1\,272\,\$$$

Pour établir la valeur du capital à la fin de l'année, on parle du capital et de l'intérêt qu'il génère. L'intérêt est calculé sur le capital en début d'année. Le capital revient à deux endroits dans le calcul. Nous pouvons isoler ce terme pour alléger le calcul. L'exemple suivant nous explique le raisonnement. Rappelons-nous qu'un nombre précédant une parenthèse sous-entend un signe de multiplication.

EXEMPLE :

Le placement est évalué à 20 000 $ et les intérêts rapportent 6 % annuellement. Les intérêts sont réinvestis à la fin de l'année. Quels sont les intérêts générés la première année par ce placement? Quelle est la valeur du capital après la première année?

SOLUTION

$$20\,000\,\$ \times 6\,\% = 20\,000\,\$ \times \frac{6}{100} = 200 \times 6 = 1\,200\,\$$$

Capital après la première année : $20\,000\,\$ + 1\,200\,\$ = 21\,200\,\$$

Où :

Capital après la première année : capital initial + intérêts : $20\,000\,\$ + 20\,000\,\$ \times 6\,\%$. Le facteur commun aux deux termes est 20 000 $. Nous pouvons donc mettre ce facteur en évidence. Il suffit de diviser chaque terme par le facteur isolé[5].

$$20\,000\,\$\,(1 + 6\,\%)$$

$$= 20\,000\,\$\,(1 + 0{,}06) = 20\,000\,\$\,(1{,}06) = 20\,000\,\$ \times 1{,}06 = 21\,200\,\$$$

5. Cette notion d'isolement des facteurs est étudiée plus en détail dans le module 2.

On s'aperçoit que pour déterminer le capital après un an, il faut multiplier le facteur (1 + taux d'intérêt) une fois.

L'exemple précédent nous démontre que la multiplication du capital par 1 plus le taux d'intérêt nous donne directement le capital après la fin d'année. Le calcul se fait en une étape comparativement à la première partie de l'exemple qui exigeait le calcul du revenu et, par la suite, son addition au capital initial.

EXEMPLE :

En s'appuyant sur les données de l'exemple précédent, quelle serait la valeur du capital après la deuxième année?

Capital après la première année : $20\,000\,\$ + 1\,200\,\$ = 21\,200\,\$$

Intérêts la 2e année : $21\,200\,\$ \times 6\,\% = 21\,200\,\$ \times \frac{6}{100} = 212 \times 6 = 1\,272\,\$$

Capital après la deuxième année : $21\,200\,\$ + 1\,272\,\$ = 22\,472\,\$$

Où :

Capital après la deuxième année : capital après la première année + intérêts

$21\,200\,\$ + 21\,200\,\$ \times 6\,\%$

Le facteur 21 200 $ peut être isolé.

$21\,200\,\$\,(1 + 6\,\%)$

$= 21\,200\,\$\,(1 + 0{,}06) = 21\,200\,\$\,(1{,}06) = 21\,200\,\$ \times 1{,}06 = 22\,472\,\$$

Où :

Capital après la deuxième année : capital initial + intérêts de la première année + intérêts de la deuxième année

$20\,000\,\$ + (20\,000\,\$ \times 6\,\%) + \left(21\,200\,\$ \times 6\,\%\right)$

Exprimons le 21 200 $ en facteur de 20 000 $.

$20\,000\,\$ + (20\,000\,\$ \times 6\,\%) + \left[\left(20\,000\,\$ + \left(20\,000\,\$ \times 6\,\%\right)\right) \times 6\,\%\right]$

Le 6 % multiplie chaque terme à l'intérieur de la parenthèse.

$20\,000\,\$ + (20\,000\,\$ \times 6\,\%) + \left[\left(20\,000\,\$ \times 6\,\%\right) + \left(20\,000\,\$ \times 6\,\% \times 6\,\%\right)\right]$

Le facteur $\left(20\,000\,\$ \times 6\,\%\right)$ se retrouve dans chaque terme à l'intérieur des crochets.

$20\,000\,\$ + (20\,000\,\$ \times 6\,\%) + \left[\left(20\,000\,\$ \times 6\,\%\right)\left(1 + 6\,\%\right)\right]$

Le facteur 20 000 $ se retrouve à l'intérieur de chaque terme.

$$20\,000\,\$\left[1+6\,\%+6\,\%\left(1+6\,\%\right)\right]$$

On peut ajouter des parenthèses à deux termes qui s'additionnent sans modifier le résultat.

$$20\,000\,\$\left[\left(1+6\,\%\right)+6\,\%\left(1+6\,\%\right)\right]$$

Le facteur $\left(1+6\,\%\right)$ se retrouve à l'intérieur de deux termes.

$$20\,000\,\$\left(1+6\,\%\right)\left(1+6\,\%\right)$$

$$20\,000\,\$\times 1{,}06\times 1{,}06=22\,472\,\$$$

On s'aperçoit que pour déterminer le capital après 2 ans, il faut multiplier le facteur (1 + taux d'intérêt) à deux reprises.

La démonstration vous paraît lourde? Retenez que les notions algébriques utilisent beaucoup ce genre de manipulations et d'isolement des termes.

L'exemple précédent nous démontre que la multiplication du capital à la fin de la première année par 1 plus le taux d'intérêt nous donne directement le capital à la fin de la deuxième année. Le calcul peut se faire à partir du capital initial. La multiplication par 1 plus le taux d'intérêt est répétée autant de fois que le nombre d'années écoulées depuis l'investissement. Le capital initial a été multiplié à deux reprises par le facteur (1 + taux d'intérêt) pour établir la valeur du capital après 2 ans. Si nous voulions connaître le capital accumulé après 5 ans, le calcul $20\,000\,\$\left(1+6\,\%\right)\left(1+6\,\%\right)\left(1+6\,\%\right)\left(1+6\,\%\right)\left(1+6\,\%\right)$ ou $20\,000\,\$\times 1{,}06\times 1{,}06\times 1{,}06\times 1{,}06\times 1{,}06$ nous donnerait la réponse directement, soit 26 765 $.

Ou encore :

La valeur du capital après *n* années = capital initial (1 + taux)^{n}.

Rabais

Les pourcentages peuvent être utilisés pour déterminer, entre autres, des prix de vente à rabais sur des produits. Le taux de rabais est appliqué au montant initial. Ce calcul détermine le montant du rabais accordé. Le montant initial moins ce montant de rabais représente le nouveau prix de vente après la réduction. Le prix après rabais peut également être établi de la façon suivante :

le prix avant rabais = 100 % du prix
le rabais = un certain pourcentage du prix avant rabais
le prix après rabais = 100 % moins le % de rabais

EXEMPLE[6] :

Quel est le prix de vente du jeu vidéo étiqueté à 92 $ et pour lequel un rabais de 25 % est accordé?

SOLUTION

Rabais : $25\,\% \times 92\,\$ = \frac{25}{100} \times 92\,\$ = \frac{92\,\$}{4} = 92\,\$ \div 4 = 23\,\$$

Prix après rabais : $92\,\$ - 23\,\$ = 69\,\$$

Ou :

Prix après rabais : $100\,\% - 25\,\% = 75\,\%$

$75\,\% \times 92\,\$ = \frac{75}{100} \times 92\,\$ = \frac{3}{4} \times 92\,\$ = \frac{276}{4} = 276 \div 4 = 69\,\$$

Les rabais peuvent aussi être calculés avec des fractions.

EXEMPLE :

Quel est le prix après rabais d'un jeu vidéo à 120 $ sur lequel un rabais de $\frac{1}{3}$ est soustrait à la caisse enregistreuse?

SOLUTION

$\frac{1}{3} \times 120\,\$ = 40\,\$$, rabais

$120\,\$ - 40\,\$ = 80\,\$$, prix après rabais

80 $ comparé à l'achat à 69 $. Andrée fait le bon choix si elle achète le jeu vidéo à 92 $ (avant rabais).

Où :

le prix avant rabais = $\frac{3}{3}$ du prix

le rabais = $\frac{1}{3}$ du prix avant rabais

le prix après rabais = $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ du prix avant rabais

$\frac{2}{3} \times 120\,\$ = 2 \times 40\,\$ = 80\,\$$, prix après rabais comparé à son achat à 69 $.

6. Les trois prochains exemples sont tirés de la mise en situation du module 1.

EXEMPLE :

Quel est le prix avant rabais du verre à 8 $ et de la tasse à 10 $ achetés par Andrée et Georges?

SOLUTION

Pour le verre :

le prix avant rabais = $\frac{3}{3}$ du prix

le rabais = $\frac{1}{3}$ du prix avant rabais

le prix après rabais = $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ du prix avant rabais

le prix avant rabais[7]

$$= \frac{\text{prix après rabais}}{\text{la fraction qui représente le prix après rabais}} = \frac{8\,\$}{2/3} = 8\,\$ \times \frac{3}{2} = 4 \times 3 = 12\,\$$$

Preuve : $\frac{2}{3} \times 12\,\$ = 2 \times 4 = 8$

Pour la tasse :

le prix avant rabais = $\frac{3}{3}$ du prix

le rabais = $\frac{1}{3}$ du prix avant rabais

le prix après rabais = $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ de rabais

le prix avant rabais

$$= \frac{\text{prix après rabais}}{\text{la fraction qui représente le prix après rabais}} = \frac{10\,\$}{2/3} = 10\,\$ \times \frac{3}{2} = 5 \times 3 = 15\,\$$$

Les calculs de rabais doivent se lire avec vigilance. Les pourcentages accordés de façon séquentielle ne correspondent pas nécessairement à la somme des pourcentages accordés. Un pourcentage unique n'est pas nécessairement égal à la somme des pourcentages pris individuellement.

EXEMPLE :

Le prix de vente d'un manteau est 200 $. Un rabais de 10 % est accordé lors de l'achat. Le même manteau se vend à 25 % de rabais chez un concurrent. Pour suivre la concurrence, le vendeur accorde un rabais additionnel e 15 %. Quelle est la meilleure offre?

7. La démonstration algébrique de cette formule sera étudiée au module 3.

SOLUTION

Offre du vendeur :

$200\,\$ \times 10\,\% = 20\,\$ \quad \Rightarrow \quad 200\,\$ - 20\,\$ = 180\,\$$

$180\,\$ \times 15\,\% = 27\,\$ \quad \Rightarrow \quad 180\,\$ - 27\,\$ = 153\,\$$

ou :

$200\,\$ \times 90\,\% = 180\,\$$

$180\,\$ \times 85\,\% = 153\,\$$

Offre du concurrent :

$200\,\$ \times 25\,\% = 50\,\$ \quad \Rightarrow \quad 200\,\$ - 50\,\$ = 150\,\$$

ou :

$200\,\$ \times 75\,\% = 150\,\$$

L'offre du concurrent est plus avantageuse.

EXEMPLE :

Un manteau est évalué à 10 000 $ et le rabais accordé par le concurrent est de 50 %. Le vendeur offre deux rabais séquentiels de 25 % chacun. Quelle est l'offre la plus avantageuse?

SOLUTION

Offre du vendeur :

$10\,000\,\$ \times 75\,\% = 7\,500\,\$$

$7\,500\,\$ \times 75\,\% = 5\,625\,\$$

Offre du concurrent :

$10\,000\,\$ \times 50\,\% = 5\,000\,\$$

L'offre du concurrent est plus avantageuse.

Si le pourcentage de rabais n'est pas connu, on peut vouloir établir ce pourcentage. Le prix initial est comparé au prix après rabais pour établir le rabais en dollars, pour établir la variation. Ce rabais est comparé au prix initial pour donner le pourcentage de réduction.

EXEMPLE :

Le jeu vidéo est affiché à 69 $. Sous ce nouveau prix est rayé le prix initial de 92 $. Quel est le pourcentage de rabais accordé sur ce produit?

SOLUTION

$$\frac{\text{prix initial} - \text{prix après rabais}}{\text{prix initial}} = \frac{92\,\$ - 69\,\$}{92\,\$} = \frac{23\,\$}{92\,\$} = 0{,}25 = 25\,\%$$

Taxes de vente

La taxe sur les produits et services (TPS) est appliquée et ajoutée à notre facture de consommation. Elle est calculée à partir du prix d'achat. La taxe de vente du Québec (TVQ) est calculée à partir du prix d'achat et de la TPS. La TVQ est donc ajoutée au prix d'achat auquel a été additionnée la TPS.

EXEMPLE :

Pour un achat de 100 $, calculez la TPS (taux de 5 %) et la TVQ (taux de 7,5 %).

SOLUTION

Calcul de la TPS : $100\,\$ \times 5\,\% = 100\,\$ \times \frac{5}{100} = 5\,\$$

Calcul de la TVQ : $(100\,\$ + 5\,\$) \times 7{,}5\,\% = 105\,\$ \times \frac{7{,}5}{100} = \frac{787{,}5}{100} = 7{,}875\,\$$

Calcul de l'achat total incluant les taxes de vente : $100\,\$ + 5\,\$ + 7{,}875\,\$ = 112{,}875\,\$$ [8]

Calcul du pourcentage global des taxes de vente ou calcul du pourcentage de variation : $\frac{112{,}875\,\$ - 100}{100} = \frac{12{,}875}{100} = 12{,}875\,\%$

Cet exemple démontre bien que l'application successive des deux pourcentages ne se compare pas du tout à l'addition des deux taux.

EXEMPLE :

Pour un achat de 3,79 $, calculez le montant total de la facture.

SOLUTION

$$3{,}79\,\$ \times 5\,\% = 3{,}79\,\$ \times \frac{5}{100} = 0{,}1895\,\$$$

$$(3{,}79\,\$ + 0{,}1895\,\$) \times 7{,}5\% = 3{,}9795\,\$ \times \frac{7{,}5}{100} = \frac{29{,}84625}{100} = 0{,}2984625\,\$$$

$3{,}79\,\$ + 0{,}1895\,\$ + 0{,}2984625\,\$ = 4{,}2779625\,\$$, montant total de la facture.

---

8. On arrive au même résultat en utilisant le raccourci suivant : montant de l'achat $\times 1{,}05 \times 1{,}075$.

NOTE : Faites les exercices de la section 5 dans le *Recueil des activités pratiques* avant de continuer la lecture.

Section 6 : les exposants et les radicaux

Les exposants

Un *exposant* est une expression numérique ou algébrique exprimant la puissance à laquelle une quantité est élevée. L'opération par laquelle cette quantité est multipliée un certain nombre de fois se nomme l'*exponentiation*. Le résultat de l'opération d'exponentiation est la *puissance*. L'exponentiation allège l'écriture et la lecture d'une multiplication répétée d'un même facteur. L'exposant indique le nombre de fois que le facteur est multiplié. Le facteur est appelé la *base*. L'exposant est le nombre (entier, positif, négatif ou fractionnaire) ou l'expression algébrique ($3\times 2, 2+3,$ etc.) placés au-dessus de la base, en petits caractères.

Ainsi, pour simplifier la lecture et l'écriture de $3\times 3\times 3\times 3=81$, l'expression numérique 3^4 est utilisée. La base est 3 et l'exposant, 4. L'exposant 4 indique que le nombre 3 est multiplié 4 fois par lui-même. L'expression 3^4 équivaut à 81 et se lit « 3 à la puissance 4 » ou « 3 exposant 4 » ou, plus rarement, « 4^e puissance de 3 ».

Un nombre exposant 1 est lui-même. Par convention, on omet d'écrire l'exposant 1. Ainsi, 4 exposant 1= $4^1=4$. Par ailleurs, il est important de noter que, par définition, tout nombre à la puissance 0 est égal à 1; par exemple, $10^0=3^0=326^0=1$.

Priorité et signe

Lors de la présentation des règles de priorités des opérations, nous avons précisé que les exposants devaient être calculés en deuxième lieu (le E de PEDMAS). Dans le cas où une parenthèse doit être multipliée plus d'une fois, il faut évaluer l'opération mathématique à l'intérieur de la parenthèse avant de calculer les exposants. Par exemple :

EXEMPLE :

$$(5+2)^2=(7)^2=49$$

Par ailleurs, si l'exposant est un nombre pair, le résultat sera positif, peu importe que la base soit positive ou négative. Si l'exposant est un nombre impair, le signe de la base détermine le signe du résultat.

EXEMPLES :

$5^2 = 5\times 5 = 25$, exposant pair et base positive : résultat positif.

$(-5)^2 = -5\times -5 = 25$, exposant pair et base négative : résultat positif.

$5^3 = 5\times 5\times 5 = 125$, exposant impair et base positive : résultat positif.

$(-5)^3 = -5\times -5\times -5 = -125$, exposant impair et base négative : résultat négatif.

Attention : le signe moins n'est pas automatiquement inclus dans la base. Pour l'inclure, il faut le mettre dans une parenthèse avec le nombre.

EXEMPLE :

$-5^2 = -(5)^2 = -(5\times 5) = -25$, mais $(-5)^2 = (-5)\times(-5) = +25$.

Propriétés des exposants

Voyons maintenant différentes règles relatives aux exposants. Le tableau 1.9 résume ces règles. Ces règles sont à la base des manipulations des exposants. Les théorèmes sont exprimés de façon générale avec des lettres. Un exemple illustre l'application du théorème.

Tableau 1.9
Les propriétés des exposants positifs

Propriétés	Exemples
1) $a^m \times a^n \quad = \quad a^{m+n}$	1) $4^3\times 4^2 \quad = \quad 4^{3+2} \quad = \quad 4^5$ $= \; 4\times 4\times 4\times 4\times 4 \quad = \quad 1\,024$ OU $4^3\times 4^2 \quad = \quad (4\times 4\times 4)\times(4\times 4)$ $= 64\times 16 = 1\,024$
$a^m\times a^n\times a^p \quad = \quad a^{m+n+p}$	$4^3\times 4^2\times 4^2 \quad = \quad 4^{3+2+2} \quad = \quad 4^7$ $= \; 4\times 4\times 4\times 4\times 4\times 4\times 4 \quad = \quad 16\,384$ OU $4^3\times 4^2\times 4^2 \; = \; (4\times 4\times 4)\times(4\times 4)\times(4\times 4)$ $= 64\times 16\times 16 = 16\,384$

Propriétés	**Exemples**
2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, si $a \neq 0$	2) $\frac{4^3}{4^2} = 4^{3-2} = 4^1 = 4$ OU $\frac{4^3}{4^2} = \frac{4\times4\times4}{4\times4} = 4$
$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, si $a \neq 0$	$\frac{4^4}{4^5} = \frac{1}{4^{5-4}} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$ OU $\frac{4^4}{4^5} = \frac{4\times4\times4\times4}{4\times4\times4\times4\times4} = \frac{1}{4}$
3) $\left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$	3) $\left(4^3\right)^2 = 4^{3\times2} = 4^6$ $= 4\times4\times4\times4\times4\times4 = 4\,096$ OU $\left(4^3\right)^2 = \left(4\times4\times4\right)^2 = \left(64\right)^2$ $= 64\times64 = 4\,096$
4) $\left(a\,b\,c\right)^m = a^m\,b^m\,c^m$	4) $\left(4\times3\times2\right)^3 = 4^3\times3^3\times2^3$ $= \left(4\times4\times4\right)\times\left(3\times3\times3\right)\times\left(2\times2\times2\right)$ $= 64\times27\times8 = 13\,824$ OU $\left(4\times3\times2\right)^3 = \left(24\right)^3$ $= 24\times24\times24 = 13\,824$
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, si $b \neq 0$	5) $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{4\times4\times4}{3\times3\times3} = \frac{64}{27}$ OU $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3} = \frac{4\times4\times4}{3\times3\times3} = \frac{64}{27}$

La deuxième règle explique pourquoi tout nombre différent de 0, mais avec 0 comme exposant donne toujours 1.

On sait déjà que tout nombre différent de 0, divisé par lui-même donne 1. Alors 5^2 divisé par 5^2 donne 1 comme résultat. C'est indiscutable.

Mais la deuxième règle nous dit que : $\frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$. Pour que tout soit cohérent, il faut absolument que 5^0 donne 1, sinon on aurait deux réponses différentes pour une même opération!

Exposants négatifs ou fractionnaires

Les exposants peuvent aussi être des nombres négatifs. La multiplication par un exposant négatif sous-entend la multiplication par l'inverse du nombre. Si l'exposant négatif est au numérateur, il est transféré en exposant positif au dénominateur : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, pour tout $a \neq 0$. L'exposant négatif au dénominateur est transféré en exposant positif au numérateur : $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$. Pour transformer un exposant négatif, il suffit de l'inverser et de changer le signe de son exposant.

EXEMPLES :

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{125}$$

$$\frac{1}{5^{-3}} = 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

Attention : un exposant négatif ne change pas le signe de la puissance ou de la base. Vous pouvez constater que les mêmes règles s'appliquent, que l'exposant soit positif ou négatif.

Le tableau 1.10 résume les propriétés des exposants négatifs.

Tableau 1.10
Les propriétés des exposants négatifs

Propriétés	Exemples
1) $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$ ou $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m \times a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$ $= a^{-(m+n)} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$	1) $4^{-3} \times 4^{-2} = 4^{-3-2} = 4^{-5} = \frac{1}{4^5}$ $= \frac{1}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{1\,024}$

Propriétés	Exemples
2) $\left(a^{-m}\right)^{-n} = a^{-m\times -n} = a^{mn}$ OU $\left(a^{-m}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{a^{m}}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m}}\right)^{n}}\right)$ $= \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a^{mn}}\right)}\right) = \left(\frac{1}{\left(\frac{a^{-mn}}{1}\right)}\right) = \left(\frac{1}{a^{-mn}}\right)$ $= \frac{a^{mn}}{1} = a^{mn}$	2) $\left(4^{-3}\right)^{-2} = 4^{-3\times -2} = 4^{6}$ $= 4\times 4\times 4\times 4\times 4\times 4 = 4\,096$ OU $\left(4^{-3}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4^{3}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{4^{3}}\right)^{2}}\right)$ $= \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{4^{6}}\right)}\right) = \left(\frac{1}{\left(\frac{4^{-6}}{1}\right)}\right) = \left(\frac{1}{4^{-6}}\right)$ $\frac{4^{6}}{1} = 4^{6} = 4\times 4\times 4\times 4\times 4\times 4 = 4\,096$
3) $\left(a\,b\,c\right)^{-m} = a^{-m}b^{-m}c^{-m} = \frac{1}{\left(a\,b\,c\right)^{m}}$ $= \frac{1}{a^{m}b^{m}c^{m}}$	3) $\left(4\times 3\times 2\right)^{-3} = 4^{-3}\times 3^{-3}\times 2^{-3} = \frac{1}{\left(4\times 3\times 2\right)^{3}}$ $= \frac{1}{4^{3}\times 3^{3}\times 2^{3}} = \frac{1}{64\times 27\times 8} = \frac{1}{13\,824}$

Les exposants peuvent aussi être des fractions ou des nombres fractionnaires. Le tableau 1.11 en présente un résumé qui généralise en fait le tableau 1.10. Toutes les mêmes propriétés s'appliquent. La signification des exposants fractionnaires sera expliquée plus loin.

Tableau 1.11
Les propriétés des exposants fractionnaires

Propriétés	Exemples
1) $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$	1) $4^{\frac{3}{8}} \times 4^{\frac{1}{8}} = 4^{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}} = 4^{\frac{4}{8}} = 4^{\frac{4\div 4}{8\div 4}} = 4^{\frac{1}{2}}$
2) $\left(a^{n}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{n\times\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{q}}$	2) $\left(4^{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{2\times\frac{3}{2}} = 4^{3} = 4\times 4\times 4 = 64$

Propriétés	Exemples
3) $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^n = a^{\frac{p}{q}\times n} = a^{\frac{np}{q}}$	3) $\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 4^{\frac{3}{2}\times 2} = 4^3 = 4\times 4\times 4 = 64$
4) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$	4) $\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{8}{3}} = 4^{\frac{3}{2}\times\frac{8}{3}} = 4^{\frac{1}{1}\times\frac{4}{1}} = 4^4 = 256$
5) $\left(a\,b\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}\times b^{\frac{p}{q}}$	5) $\left(4\times 3\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{3}{2}}$

Note : Les exposants peuvent être à la fois négatifs et fractionnaires.

Les radicaux

La multiplication répétée d'un nombre se travaille avec la notion d'exposant ou de puissance. On peut faire le cheminement inverse. On peut se demander quel nombre multiplié par lui-même deux fois, trois fois, quatre fois, par exemple, donne tel résultat. L'expression numérique, le *radical*, nous permet de répondre à ce genre de situation. Le symbole utilisé est le $\sqrt[n]{}$. Ce symbole se lit radical *n*-ième ou racine *n*-ième d'un nombre. Le caractère « *n* » s'appelle un *indice de radical* et le nombre à l'intérieur du radical s'appelle le *radicande*. La racine *n*-ième d'un nombre (exemple : 81) est un nombre (exemple : 9) dont la *n*-ième puissance (exemple : puissance 2) sera égale à ce nombre (exemple : 81) (2e puissance de 9, $9^2 = 81$; la racine deuxième de 81, $\sqrt[2]{81}$, est 9).

Par convention, lorsqu'un radical ne montre pas d'indice, c'est que l'indice est 2. On dit alors que l'indice est 2 par défaut et on parle de *racine carrée* positive. Si l'indice du radical est 3, on parle de *racine cubique* d'un nombre. Dans les autres cas, on parle de racine *n*-ième d'un nombre. Déterminer la valeur d'un nombre exposant *n* (exemple : 9^2) est l'opération inverse de chercher la racine *n*-ième de cette valeur ($\sqrt[2]{81}$).

EXEMPLE :

$\sqrt[2]{81}$ Quel nombre multiplié par lui-même donnera 81 comme résultat?

SOLUTION

$(?)^2 = 81 \;\Rightarrow\; 9\times 9 = 81 \;\text{ et }\; -9\times -9 = 81$

$9^2 - 81 = 0 \;\Rightarrow\; \left(9\times 9\right) - 81 = 0 \;\Rightarrow\; 81 - 81 = 0$

81 est égal à la deuxième puissance de 9 et de -9.

9 et -9 sont les racines carrées de 81.

Si la puissance est paire, il y a deux racines carrées, l'une positive, l'autre négative :

$9\times 9=81$ et $-9\times -9=81$.

EXEMPLE :

$\sqrt[3]{64}$ $\sqrt[3]{64}$ Quel nombre multiplié trois fois par lui-même donnera 64 comme résultat?

SOLUTION

$(?)^3=64 \quad \Rightarrow \quad 4\times 4\times 4=64$

$4^3-64=0 \quad \Rightarrow \quad (4\times 4\times 4)-64=0 \quad \Rightarrow \quad 64-64=0$

64 est égal à la troisième puissance de 4.

4 est la racine cubique de 64.

EXEMPLE :

$\sqrt[3]{-64}$ Quel nombre multiplié trois fois par lui-même donnera – 64 comme résultat?

SOLUTION

$(?)^3=-64 \quad \Rightarrow \quad -4\times -4\times -4=-64$

$(-4)^3-(-64)=0 \quad \Rightarrow \quad (-4\times -4\times -4)-(-64)=0 \quad \Rightarrow \quad -64+64=0$

– 64 est égal à la troisième puissance de – 4.

– 4 est la racine cubique de – 64.

EXEMPLE :

$\sqrt[2]{4^2}$

SOLUTION

$\sqrt[2]{4^2}=4^{\frac{2}{2}}=4^1=4$ (et aussi – 4, car $\sqrt[2]{4^2}=\sqrt[2]{16}=\pm 4$).

EXEMPLE :

$\sqrt{3^4}$

SOLUTION

$\left(3^4\right)^{1/2}=3^{\frac{4}{2}}=3^2=9$

OU

$\sqrt{3^4}=\sqrt{3\times 3\times 3\times 3}=\sqrt{81}=9$

La racine carrée correspond à l'exposant $\frac{1}{2}$. La racine cubique correspond à l'exposant $\frac{1}{3}$.

En partant du principe que $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$ et en partant des propriétés relatives aux exposants fractionnaires, le tableau 1.12 présente les propriétés des radicaux.

De façon générale, $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$.

EXEMPLE

$27^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{27^4} = (\sqrt[3]{27})^4 = 3^4 = 81$

Tableau 1.12
Les propriétés des radicaux

Propriétés	Exemples
1) $\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ ou $(a\,b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$	1) $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$
2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ou $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	2) $\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{5 \times 5 \times 5}}{\sqrt[3]{3 \times 3 \times 3}} = \frac{5}{3}$
3) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	3) $\sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

2^5 se lit « 2 exposant 5 » et le résultat est 32. Le nombre 32 correspond à la cinquième puissance de 2. On pourrait aussi déterminer quelle est la cinquième racine de 32 : $\sqrt[5]{32}$ ou $32^{1/5}$ = 2 puisque $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

Rechercher la racine *n*-ième d'un nombre ne donne pas toujours un nombre entier. On peut alléger la présentation sans nécessairement arriver à un résultat exact. On peut réduire la base en la décomposant en facteur pour lesquels les racines *n*-ièmes sont déterminables.

EXEMPLE :

$\sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{9} \times \sqrt{6} = 3 \times \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

Enfin, les radicaux ayant le même radicande et le même indice peuvent s'additionner ou se soustraire.

EXEMPLE :

$5\sqrt{20} + 3\sqrt{75} + 4\sqrt{45}$

$= 5\sqrt{4 \times 5} + 3\sqrt{25 \times 3} + 4\sqrt{9 \times 5}$

$= \left(5 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5}\right) + \left(3 \times \sqrt{25} \times \sqrt{3}\right) + \left(4 \times \sqrt{9} \times \sqrt{5}\right)$

$= \left(5 \times 2 \times \sqrt{5}\right) + \left(3 \times 5 \times \sqrt{3}\right) + \left(4 \times 3 \times \sqrt{5}\right)$

$= \left(10 \times \sqrt{5}\right) + \left(15 \times \sqrt{3}\right) + \left(12 \times \sqrt{5}\right)$

$= \left(10 + 12\right)\sqrt{5} + \left(15\sqrt{3}\right)$

$= 22\sqrt{5} + 15\sqrt{3}$

Les exposants, les radicaux et la calculatrice

Déterminer les exposants à l'aide de la calculatrice n'est pas sorcier. Il suffit d'entrer la base, d'appuyer sur la touche exposant et sur le nombre représentant l'exposant. Par contre, si l'exposant est une fraction ou un nombre fractionnaire, il faut exprimer l'exposant fractionnaire en nombre décimal. La conversion étant effectuée, la même démarche de saisie doit être faite : entrer la base, la touche exposant et le nombre décimal représentant l'exposant.

EXEMPLE :

$2^{\frac{3}{4}} = 2^{3 \div 4} = 2^{0,75} = 1,68$

EXEMPLE :

$\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = 25^{0,5} = 5$

Des applications financières

En nous référant aux notions de pourcentage, nous avons établi que la multiplication du capital par (1 + taux d'intérêt) détermine la somme accumulée après une année. Pour connaître le capital après un certain nombre d'années, la multiplication du terme (1 + taux d'intérêt) est répétée autant de fois que le nombre d'années recherché. Cette formule s'applique si les intérêts sont réinvestis à chaque année, dans un contexte d'intérêts composés. Pour éviter la répétition du facteur d'intérêt, la parenthèse est élevée à une certaine puissance, parenthèse exposant le nombre d'années recherché.

EXEMPLE :

Yvon investit 20 000 $ à un taux de rendement composé de 6 %. Quel sera le capital accumulé après 5 ans?

SOLUTION

$$20\,000\,\$\,(1+6\,\%)(1+6\,\%)(1+6\,\%)(1+6\,\%)(1+6\,\%)$$

Si on cherche le capital après 20 ans, il faudrait répéter la parenthèse 20 fois. On se sert donc de la notion d'exposant pour alléger l'écriture et la lecture de l'opération.

$$20\,000\,\$\,(1+6\,\%)^5$$

$$20\,000\,\$\,(1{,}06)^5$$

Le facteur $(1{,}06)^5$ peut être calculé au moyen de la calculatrice.

$$20\,000\,\$\times 1{,}338225578 = 26\,674{,}51\,\$$$

ou

$$20\,000\,\$\times 1{,}06\times 1{,}06\times 1{,}06\times 1{,}06\times 1{,}06 = 26\,764{,}51\,\$\ .$$

Voici d'autres exemples d'applications financières où les notions d'exposant ou de racine peuvent être utilisées.

– Monsieur Caron veut connaître la somme qu'il doit placer aujourd'hui pour bénéficier d'un capital de 5 000 $ dans 5 ans compte tenu d'un taux de rendement composé de 7 %. La formule *capital (1 + taux d'intérêt)-n* permet de déterminer la valeur actuelle de la somme à investir aujourd'hui pour que soit atteint l'objectif de monsieur Caron dans 5 ans.

  $$5\,000\,\$\,(1+7\,\%)^{-5} = \frac{5\,000\,\$}{(1+7\,\%)^5} = \frac{5\,000\,\$}{(1{,}07)^5} = \frac{5\,000\,\$}{1{,}4025517} = 3\,564{,}93\,\$\ .$$

  Il doit donc investir 3 564,93 $ dès aujourd'hui.

– Madame Barrette veut déterminer le taux effectif d'une dette dont le taux d'intérêt nominal est 16 % capitalisé semestriellement. La formule $\left(1+\frac{\text{taux d'intérêt nominal}}{2}\right)^2 - 1$ détermine le taux effectif.

  $$\left(1+\frac{16\,\%}{2}\right)^2 - 1 = \left(1+\frac{0{,}16}{2}\right)^2 - 1 = (1+0{,}08)^2 - 1 = (1{,}08)^2 - 1 = 1{,}1664 - 1 = 0{,}1664 = 16{,}64\,\%$$

NOTE : Faites les exercices de la section 6 dans le Recueil des activités pratiques avant de continuer la lecture.

Résumé

Les nombres

L'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$, nombres positifs, se compose du zéro, des nombres premiers et des nombres composés. Les nombres pairs et impairs, positifs et négatifs, forment l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$. Les nombres entiers peuvent être positifs et négatifs. La valeur absolue d'un nombre positif ou négatif correspond à la valeur positive de ce nombre.

Tous les nombres étudiés dans ce cours sont des nombres réels $\mathbb{R}$. Les nombres réels peuvent être rationnels ($\mathbb{Q}$) ou irrationnels ($\mathbb{Q}$'). Un nombre rationnel est un nombre dont la suite décimale est finie ou infinie, mais périodique. Il y a toujours possibilité de l'exprimer sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers. Dans les autres cas, le nombre est un nombre irrationnel.

Les opérations mathématiques et les symboles arithmétiques

Les quatre opérations de base sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. La somme est le résultat de l'addition, opération mathématique par laquelle un nombre est ajouté à un autre. La différence est le résultat de la soustraction, opération mathématique par laquelle un nombre est retranché d'un autre. Le produit est le résultat de la multiplication, opération mathématique par laquelle un nombre est ajouté plusieurs fois à un autre. Le quotient est le résultat de la division, opération mathématique par laquelle un nombre est séparé en plusieurs parties.

La règle des signes dicte le résultat de l'opération mathématique compte tenu des signes des nombres et de l'opération en cause.

Une expression numérique représente le regroupement d'une séquence de nombres et d'opérations mathématiques. Les règles de priorité définissent la séquence des opérations à effectuer. Elles établissent l'ordre de calcul des opérations.

Les fractions

Une fraction s'exprime sous la forme $\frac{a}{b}$ ou a/b, où « *a* », appelé le numérateur, est le nombre au-dessus de la barre de fraction, et « *b* », appelé le dénominateur, est le nombre en dessous de la barre de fraction. L'égalité entre deux rapports s'appelle une proportion.

Les fractions sont équivalentes si elles représentent le même nombre rationnel. Une fraction est réductible si le numérateur et le dénominateur ont au moins un diviseur commun différent de 1. Une fraction est dite irréductible si le seul diviseur commun au numérateur et au dénominateur est le nombre 1. La fraction est ainsi réduite à sa plus simple expression.

Pour additionner ou soustraire des fractions, il faut les exprimer sous la forme d'un dénominateur commun. Il suffit d'additionner ou de soustraire les numérateurs. Le produit de deux ou de plusieurs fractions correspond à une fraction dont le numérateur équivaut au produit des numérateurs, et le dénominateur, au produit des dénominateurs. Il peut être utile de réduire les fractions à leur plus simple expression avant de les multiplier. Pour pouvoir diviser deux fractions, il faut convertir la division en multiplication. Diviser un nombre par un autre équivaut à le multiplier par son inverse.

Un nombre fractionnaire est composé d'un nombre entier et d'une fraction. Un nombre fractionnaire peut être converti en fraction. Une fraction dont le numérateur est supérieur au dénominateur peut être convertie en nombre fractionnaire.

Les nombres décimaux

Un nombre décimal $\mathbb{D}$ est composé d'une suite finie de chiffres à la droite de la virgule. Un nombre décimal peut être converti en fraction ou en nombre fractionnaire. L'équivalent décimal d'une fraction correspond à la division du numérateur par le dénominateur. Si le résultat est une suite finie de chiffres, nous sommes en présence d'un nombre décimal. Une fraction ou un nombre fractionnaire pouvant s'exprimer sous forme de fraction équivalente dont le dénominateur est 10, 100, 1 000, etc. peut être converti en nombre décimal.

Les déplacements de la virgule vers la droite ou vers la gauche allègent l'opération de multiplication ou de division de nombres décimaux par 10, 100, 1 000, etc.

L'alignement de la virgule pour additionner ou soustraire des nombres décimaux est important car il permet de s'assurer que l'on traite les milliers avec les milliers comme les millièmes avec les millièmes.

La multiplication des nombres décimaux s'effectue de la même façon que la multiplication des nombres entiers. Le nombre de chiffres à la droite de la virgule à l'intérieur des facteurs détermine le nombre de chiffres à la droite de la virgule pour le produit.

La règle générale de la division des nombres décimaux préconise l'expression du dividende et du diviseur en nombres entiers. La virgule est déplacée et éliminée avant de procéder à l'opération. L'ajout de zéros peut être nécessaire pour poursuivre l'opération. Cet ajout détermine l'emplacement de la virgule dans le quotient.

Les pourcentages

La règle générale prévoit une multiplication d'un terme par 100 pour déterminer son équivalence en pourcentage. Un pourcentage peut aussi être exprimé en nombre décimal ou en fraction. Normalement, la division d'un nombre par 100 permet de trouver son équivalence. Pour déterminer le pourcentage d'augmentation ou de diminution, il faut comparer la variation des nombres par rapport à la valeur initiale.

Les exposants et les radicaux

L'exponentiation permet d'alléger l'écriture et la lecture d'une multiplication répétée d'un facteur. L'exposant détermine le nombre de fois que le facteur, la base, est multiplié. Un exposant négatif sous-entend une multiplication par l'inverse du nombre. Un exposant fractionnaire associe le numérateur à l'exposant du radicande et le dénominateur à l'indice du radical.

La racine *n*-ième d'un nombre détermine quel nombre est multiplié *n* fois pour donner la valeur du radicande, c'est-à-dire le nombre sous le signe du radical.