Module 4 – Fonctions

Exercices et corrigé

Version 3

MQT 1001
Mathématiques appliquées
à la gestion

Houda Affes

UNIVERSITÉ TÉLUQ

Table des matières

Exercices

Section 1

1. Dans un plan cartésien, dites le signe de l'abscisse x et de l'ordonnée y dans chacun des quadrants I, II, III et IV de la figure 4.1 de la lecture du module.

2. Positionnez les points suivants dans un même graphique :
(0, 0); (0, 10); (–2, 3); (–8, –6); (3, –6); (–3, 1), (–4, –2)

3. Positionnez les points des relations suivantes dans un même graphique et dites s'il s'agit d'une fonction :

a)

Tableau 4.1
Table des valeurs de la question 3a

X	1	1	2	2	3	3	4	4
Y	–2	2	–4	4	–6	6	–8	8

b)

Tableau 4.2
Table des valeurs de la question 3b

X	1	2	3	4
Y	4	5	2	1

c)

Tableau 4.3
Table des valeurs de la question 3c

x	2	4	2	3
y	1	5	–3	3

d)

Tableau 4.4
Table des valeurs de la question 3d

x	–2	–1	0	1
y	3	–5	8	2

4. Après avoir déterminé quelques valeurs correspondant aux fonctions suivantes, représentez-les graphiquement :

   a) $f(x) = 2x - 5$

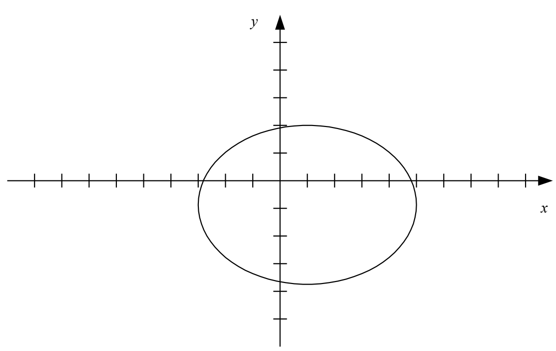
   b) $f(x) = 2x - 10$

   c) $f(x) = 4x + 10$

5. En vous basant sur le procédé d'examen d'un graphique cartésien décrit dans la lecture du module 4, dites si les graphiques suivants représentent des fonctions ou des relations.

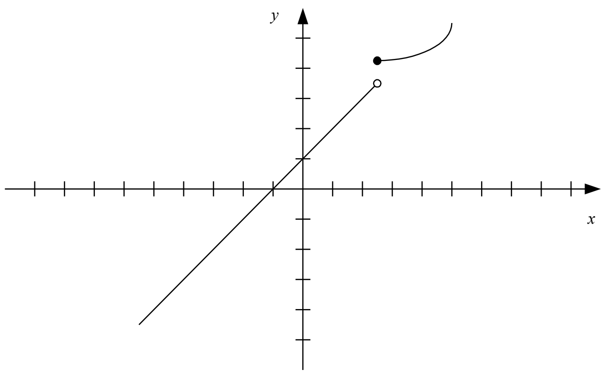
   a)

Figure 4.1



b)

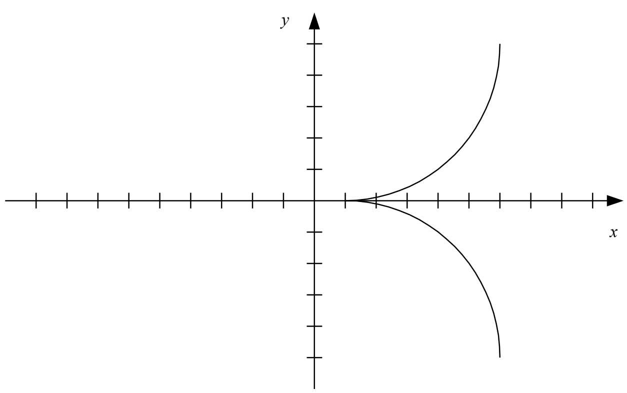
Figure 4.2



Dans le graphique ci-dessus, le point blanc (vide) signifie qu'il n'appartient pas au graphique alors que le point noir, lui, en fait partie.

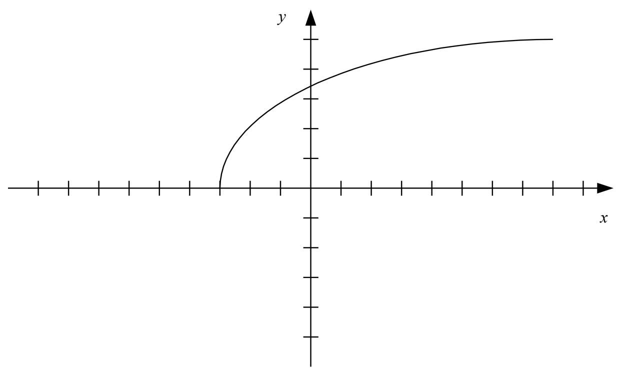
c)

Figure 4.3



d)

Figure 4.4

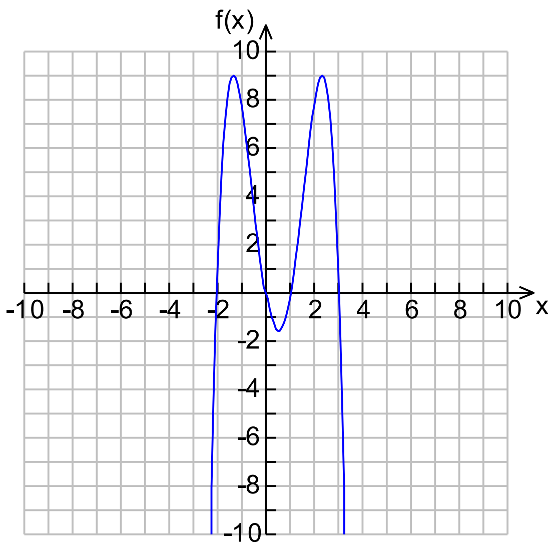


6. Trouvez les zéros et l'ordonnée à l'origine des fonctions définies par les règles de correspondance suivantes :
   a) $f(x) = 2x - 5$
   b) $f(x) = 3x + 6$
   c) $f(x) = x^2 - 25$
   d) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

7. Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux :
   a) Une relation est toujours une fonction.
   b) Une fonction peut avoir deux ordonnées à l'origine.
   c) Une fonction peut avoir plus d'un zéro.
   d) Une fonction peut ne pas avoir de zéro.
   e) Une fonction est toujours une relation.

8. La fonction f est représentée par le graphique cartésien qui suit.

Figure 4.5
Graphique cartésien de l'exercice 8.



Déterminez :

a) $f(-2)$

b) $f(2)$

c) Dom f

d) Codom f

e) L'ordonnée à l'origine

f) Les zéros

g) Un maximum

h) Les intervalles où la fonction est positive

i) Les intervalles où la fonction est négative

j) Les intervalles de croissance

k) Les intervalles de décroissance

Section 2

9. Parmi les fonctions suivantes, déterminez celles qui sont constantes, linéaires, quadratiques, exponentielles, rationnelles ou irrationnelles.

   a) $f(x)=5x^2-8x+3$

   b) $g(x)=25$

   c) $h(x)=3-5x$

   d) $i(x)=\sqrt{x-7}$

   e) $j(x)=50(3)^x$

   f) $k(x)=\dfrac{30}{x-1}$

   g) $l(x)=4+x^2$

   h) $m(x)=\mathrm{e}^x-4$

10. Soit la fonction f permettant d'établir la correspondance entre les dollars et les euros à une date donnée, définie par la règle $f(x)=1{,}5x$, où x représente le montant en euros et $f(x)$, le montant en dollars canadiens. Tracez le graphique de cette fonction et déterminez :

    a) le taux de variation de cette fonction linéaire;

    b) le nombre de dollars correspondant à 500 euros;

    c) le nombre d'euros correspondant à 360 $;

    d) l'ordonnée à l'origine de cette fonction.

11. Sachant que la correspondance entre les kilogrammes et les livres est décrite par $f(x)=2{,}2x$, où x est le nombre de kilogrammes :

    a) esquissez le graphique de f ;

    b) dites quelle est la valeur de $f(3)$? de $f(5)$ et ce que représentent ces valeurs;

    c) indiquez l'équivalent en livres de 80 kilogrammes et de 100 kilogrammes.

12. La fonction exprimant la température en degrés Fahrenheit à partir de la température en degrés Celsius est linéaire. Comme l'eau gèle à 32°F ou 0°C et qu'elle bout à 212°F ou 100°C, les couples (0,32) et (100, 212) appartiennent à cette fonction.

    a) Déterminez la règle de cette fonction.

    b) Esquissez son graphique.

    c) Exprimez en Fahrenheit les températures suivantes : 25°C, 50°C, 75°C.

13. Le coût de production d'un article manufacturé comprend le coût des matériaux (20 $) et le coût de la main-d'œuvre de 18 $ l'heure.

    a) Quelle est la règle de la fonction qui exprime le coût total de production en fonction du nombre d'heures travaillées?

    b) Tracez le graphique représentant cette fonction.

    c) Quelle est l'ordonnée à l'origine de cette fonction?

14. À partir de la table de valeurs suivante, déterminez le taux de variation puis l'équation représentant cette fonction.

Tableau 4.5
Table des valeurs de la question 14

x	5	6	7	8	9
y	12	15	18	21	24

    a) Déterminez le taux de variation de cette fonction.

    b) Quelle l'ordonnée à l'origine?

    c) Indiquez l'équation représentant la fonction.

    d) Quel est le zéro?

15. Dans un entrepôt, on considère que les marchandises sortent de façon régulière, c'est-à-dire que la demande est à peu près la même tous les jours. Deux jours après la dernière livraison, il restait 58 boîtes de vis d'un format déterminé. Trois jours plus tard, il en restait 46.

    a) Déterminez la règle de la fonction qui représente le nombre de boîtes de vis de ce format restant dans l'entrepôt x jours après la dernière livraison.

    b) Combien y avait-il de boîtes de vis après la livraison?

    c) Si le stock n'est pas renouvelé, combien de temps après la dernière livraison le stock de vis sera-t-il complètement épuisé?

    d) Combien de temps après la dernière livraison la suivante devrait-elle avoir lieu si l'on veut qu'il reste toujours au moins 18 boîtes de vis dans l'entrepôt?

16. Dressez le tableau de quelques valeurs de x et de $f(x)$ pour chacune des fonctions suivantes puis esquissez-en le graphique. Trouvez le point sommet et les zéros des fonctions a), c) et e)

    a) $f(x)=x^2-7x+10$

    b) $f(x)=x^2-x+4$

    c) $f(x)=x^2-5$

    d) $f(x)=2x^2+3$

    e) $f(x)=-2x^2+5x$

    f) $f(x)=-3x^2-6x+2$

17. Un investisseur constate que, à partir du moment de l'achat, la valeur d'une action peut être modélisée par la fonction suivante : $f(x)=-x^2+20x+8$, où x représente le nombre de jours depuis l'achat de l'action.

    a) Pendant combien de jours la valeur de l'action a-t-elle été croissante?

    b) Quelle a été la valeur maximum qu'elle a atteinte?

    c) Si elle continue à suivre ce modèle, combien de jours après l'achat l'action ne vaudra-t-elle plus un sou?

    d) Combien de jours après l'avoir achetée l'a-t-il vendue s'il l'a revendue au même prix qu'il l'avait achetée?

18. Un peintre désire déterminer le prix de ses œuvres en fonction de la largeur de ses toiles (en centimètres). La hauteur des toiles est toujours supérieure de 10 centimètres à la largeur. Il veut obtenir 1 $ par centimètre carré plus un montant fixe de 100 $ par toile.

    a) Si l'on considère que la variable x représente la largeur des toiles, quelle expression représente l'aire des toiles?

    b) Quelle est l'équation de la fonction qui permet de déterminer le prix d'une toile selon la largeur de celle-ci?

    c) Quel est le montant minimum qu'il peut obtenir pour une toile si les plus petites ont 10 centimètres de largeur?

19. Dressez un tableau de quelques valeurs de x et de $f(x)$ pour chacune des fonctions suivantes puis esquissez-en le graphique.

    a) $f(x)=3^x$

    b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

    c) $f(x)=e^x$

    d) $f(x)=e^{-x}$

20. Lors de l'achat par la compagnie, un camion valait 80 000 $. Chaque année, le comptable passe une écriture aux livres pour tenir compte de la dévaluation du véhicule. Durant une année, ces équipements sont réputés perdre 25 % de leur valeur en début d'année.

    a) Quelle est la règle de la fonction qui représente la valeur du camion x années après son acquisition?

    b) Tracez le graphique de cette fonction.

    c) Quelle sera la valeur du camion après 10 ans?

    d) Combien d'années après son acquisition la valeur du camion sera-t-elle sous les 20 000 $?

21. Un capital de 5 000 $ est placé à un taux de 3 %. Les intérêts sont versés chaque année et immédiatement réinvestis dans les mêmes conditions.

    a) Déterminez la règle de la fonction f qui représente la valeur totale du placement et des intérêts accumulés au bout de x années.

    b) Quelle est la valeur de $f(5)$ et que représente ce nombre?

    c) Combien d'années faudrait-il laisser ce capital investi pour que la valeur totale du capital et des intérêts s'élève à 9 000 $?

22. (Facultatif) Quel est le domaine de la fonction définie dans les réels par $f(x)=\frac{12}{\sqrt{x-4}}$?

Section 3

23. Déterminez la fonction dérivée des fonctions suivantes :

   a) $f(x) = x^5$

   b) $g(x) = 4(x^{40})$

   c) $h(x) = x^{1/2} + 5x^7$

   d) $j(x) = (1/2)x^{-4}$

   e) $k(x) = e^x$

   f) $l(x) = e^{3x}$

   g) $m(x) = e^{x^3}$

   h) $n(x) = 5^{3x+2}$

24.

   a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 7x - 4$

   b) $g(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2x}$

   c) $h(x) = \sqrt[3]{x^5} + e^x$

   d) $j(x) = 4xe^{3x}$

   e) $k(x) = \dfrac{2x}{5^x}$

   f) $l(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

   g) $m(x) = e^{x^3 - 2x^2 + 5x - 7}$

   h) $n(x) = \dfrac{2x-6}{x+5}$

25. Quel est le taux de variation de la courbe $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 6x - \pi$ au point où $x = 3$?

26. Soit la fonction définie par $g(x) = g(x) = (2x+4)^2 + (x-9)$.

   a) Déterminez la pente de la tangente à cette courbe au point où $x = 4$.

   b) Déterminez la pente de la normale à cette courbe qui est au point de tangence où $x = 1$.

   c) Déterminez le minimum de cette fonction s'il en existe un.

   d) Faites le graphique représentant cette fonction.

27. La fonction $f(x)=10\left(\frac{5}{4}\right)^{x}$ modélise bien l'offre pour un produit dans un marché donné, pour x compris entre 2 et 10. La variable x eprésente le prix de vente du produit et $f(x)$ est le nombre d'unités de mille unités du produit que les fabricants sont prêts à produire pour les vendre au prix x. En bas de 2 \$, personne n'est prêt à en fabriquer. À plus de 10 \$, l'offre serait pour ainsi dire illimitée, mais la courbe de la demande montre que les consommateurs ne sont pas prêts à payer ce prix.

    Quel est le taux marginal du nombre de produits offerts par rapport au prix, à $x=6$?

28. La normale à la courbe représentant la fonction $h(x)=\frac{x+3}{x}$ au point où $x=2$ passe-t-elle par l'origine du plan (0, 0)?

29. Le graphique représentant une fonction exponentielle dont l'équation a la forme $f(x)=b^{x}+k$ (passe par les points (1, 4) et (2, 16).
    Quelle est la règle (ou l'équation) de cette fonction?

30. La parabole représentant la fonction $f(x)$ a comme sommet le point (2, 4). Un de ses zéros est 4. Quelle est l'ordonnée à l'origine de cette fonction?

Corrigé des exercices

Section 1

1.

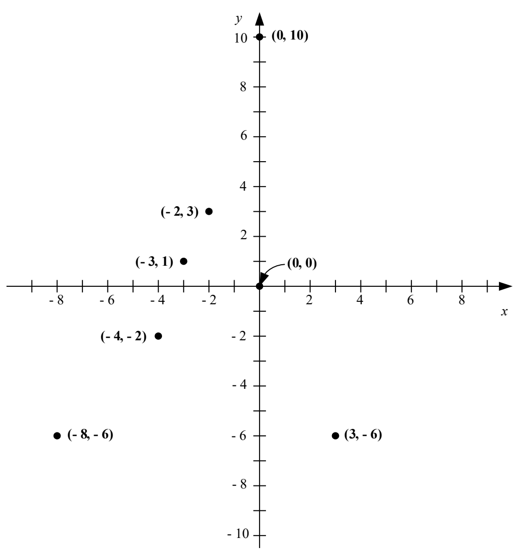
Quadrant I : (x , y) = (positif, positif)

Quadrant II : (x , y) = (négatif, positif)

Quadrant III : (x , y) = (négatif, négatif)

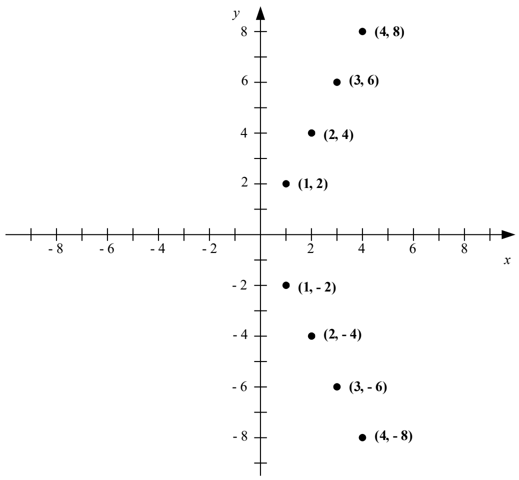
Quadrant IV : (x , y) = (positif, négatif)

2. Réponse :

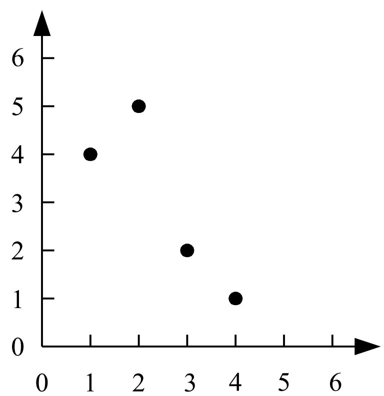


3.

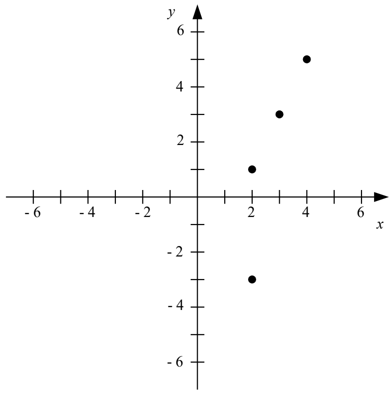
a) Ce n'est pas une fonction



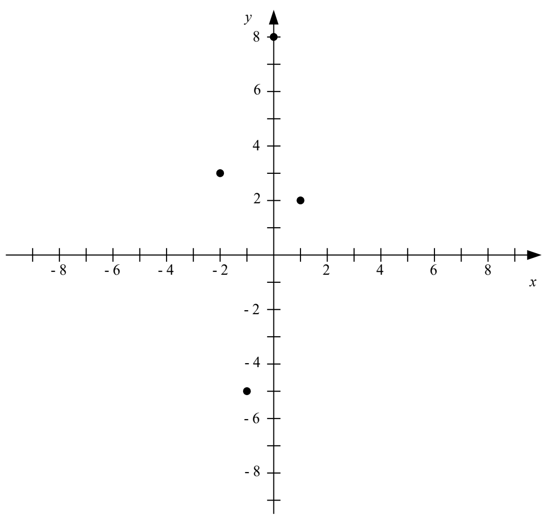
b) Fonction



c) Ce n’est pas une fonction



d) Fonction

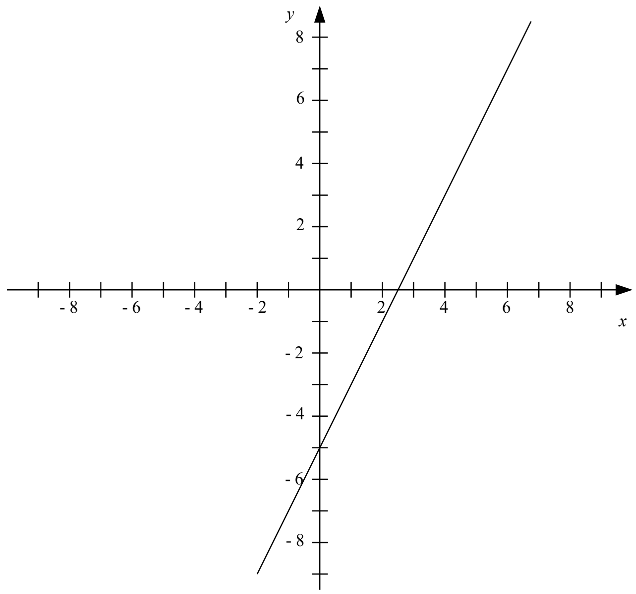


4. Représentation graphique :

a) $f(x) = 2x - 5$

Quelques valeurs correspondant à la fonction $f(x) = 2x - 5$:

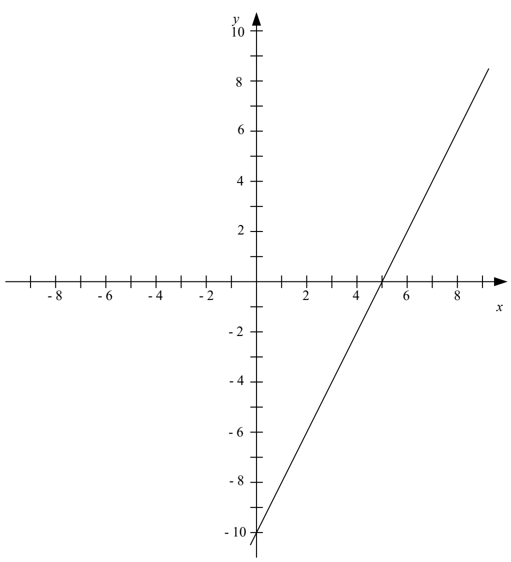
x	1	2	3	0	– 1
$y = 2x - 5$	– 3	– 1	1	– 5	– 7



b) $f(x) = 2x - 10$

Quelques valeurs correspondant à la fonction $f(x) = 2x - 10$:

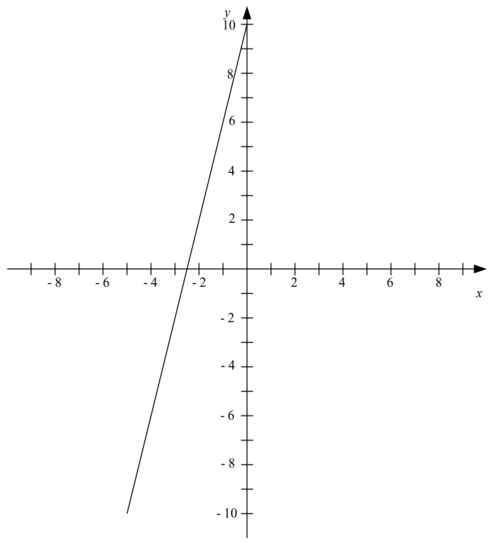
x	1	2	3	5	0
$y = 2x - 10$	– 8	– 6	– 4	0	– 10



c) $f(x) = 4x + 10$

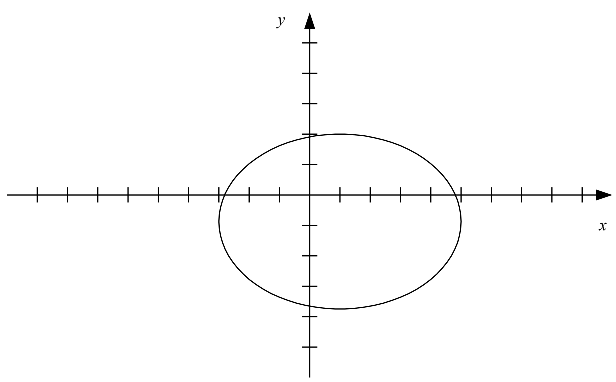
Quelques valeurs correspondant à la fonction $f(x) = 4x + 10$:

x	0	– 1	– 2	– 3	– 4
$y = 4x + 10$	10	6	2	– 2	– 6



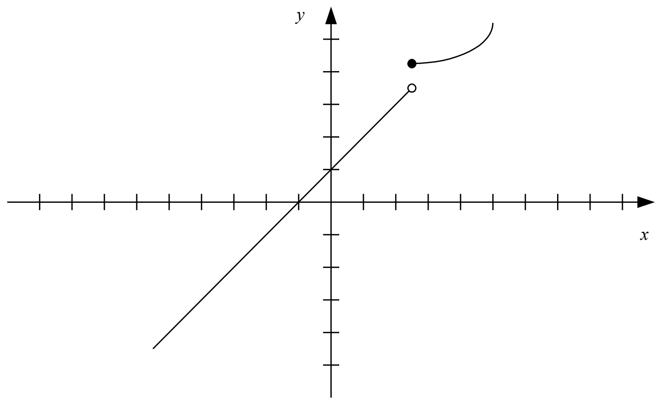
5.

a)



Réponse : relation

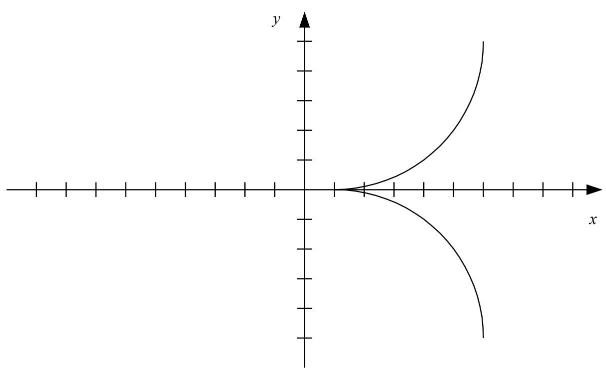
b)



Réponse : fonction discontinue

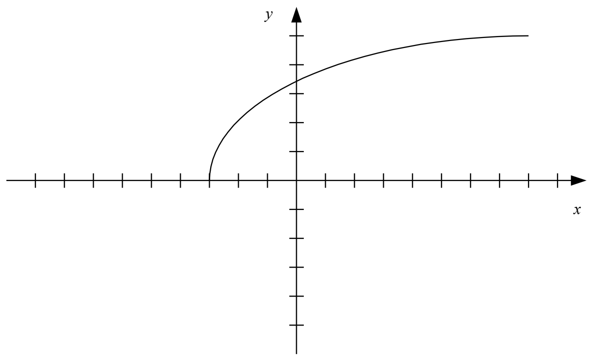
Dans le graphique ci-dessus, le point blanc (vide) signifie qu'il n'appartient pas au graphique alors que le point noir, lui, en fait partie.

c)



Réponse : relation

d)



Réponse : fonction

6. Trouvez les zéros et l'ordonnée à l'origine des fonctions définies par les règles de correspondance suivantes :

   a) $f(x)=2x-5$
   Zéro : $x=2{,}5$ Ordonnée à l'origine : $y=-5$

   b) $f(x)=3x+6$
   Zéro : $x=-2$ Ordonnée à l'origine : $y=6$

   c) $f(x)=x^2-25$
   Zéro : $x=5$ et $x=-5$ Ordonnée à l'origine : $y=-25$
   car $f(x)=(x+5)(x-5)$

   d) $f(x)=x^2-4x-5$
   Zéro : $x=5$ et $x=-1$ Ordonnée à l'origine : $y=-5$
   car $f(x)=(x-5)(x+1)$

7.

   a) Faux

   b) Faux

   c) Vrai

   d) Vrai

   e) Vrai

8.

a) $f(-2) = 0$

b) $f(2) = 8$

c) Dom f = Tous les réels ou encore $]-\infty, \infty[$ ou $\mathbb{R}$

d) Codom f = $]-\infty, 9]$

e) 0

f) –2, 0, 1 et 3

g) 9

h) [–2, 0] et [1, 3]

i) $]-\infty, -2]$, [0, 1] et $[3, \infty[$

j) $]-\infty, -1{,}5]$ et [0,5; 2,2]

k) [–1,5; 0,5] et $[2{,}2, \infty[$

Section 2

9.

a) Fonction quadratique, car il a un terme en x^2 ; ici, $a = 5$, $b = -8$ et $c = 3$

b) Fonction constante

c) Fonction linéaire, où $a = -5$ et $b = 3$

d) Fonction irrationnelle

e) Fonction exponentielle de base 3

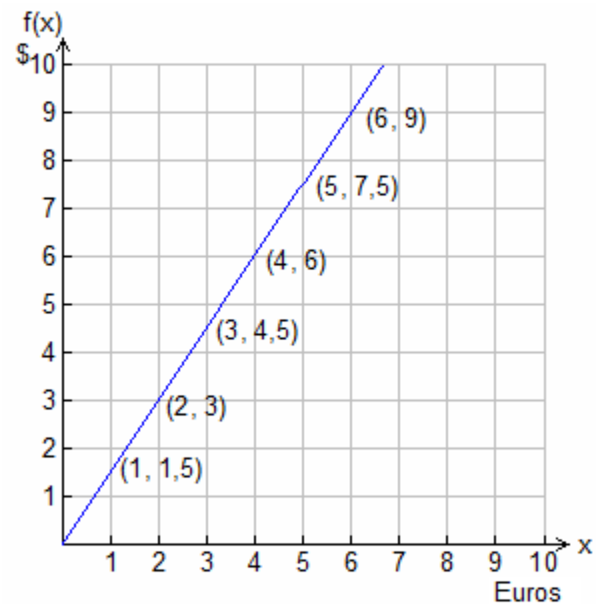
f) Fonction rationnelle; attention : elle n'est pas définie pour $x = 1$

g) Fonction quadratique où $a = 1$, $b = 0$ et $c = 4$

h) Fonction exponentielle de base e

10. Table des valeurs de la fonction $f(x)=1{,}5x$

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1,5	3	4,5	6	7,5	9



a) Le taux de variation est de 1,5 $ par euro (c'est le coefficient de x).

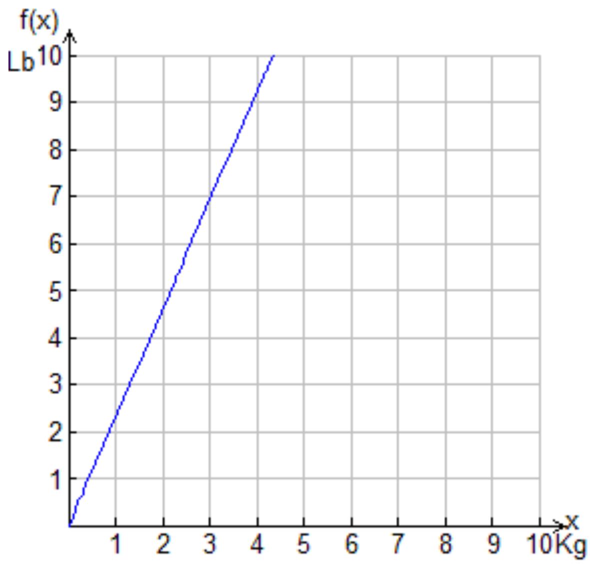
b) $f(500)=1{,}5(500)=750$, soit 750 $ pour 500 euros.

c) $360=1{,}5x$ donc $x=\dfrac{360}{1{,}5}=240$, soit 240 euros pour 350 $.

d) L'ordonnée à l'origine est 0.

11.

a) Graphique de la fonction $f(x)=2,2x$.



b) $f(3)=2,2(3)=6,6$; 6,6 livres pour 3 kilogrammes
$f(5)=2,2(5)=11$; 11 livres pour 5 kilogrammes

c) $f(80)=2,2(80)=176$; 176 livres pour 80 kilogrammes
$f(100)=2,2(100)=220$; 220 livres pour 100 kilogrammes

12.

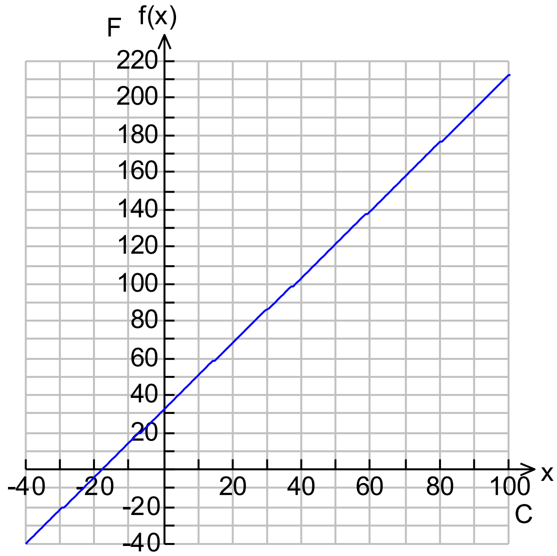
a) Il faut d'abord déterminer la pente de la droite ou le taux de variation de la fonction.

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{212-32}{100-0}=\frac{180}{100}=1,8$$

L'ordonnée à l'origine est également connue, car 32 est la valeur de y quand $x=0$ (on a le couple (0, 32)).

Comme c'est une fonction linéaire, $a=1,8$ et $b=32b$. La règle de la fonction est donc $f(x)=1,8x+32$, où x est la température exprimée en degrés Fahrenheit.

b)

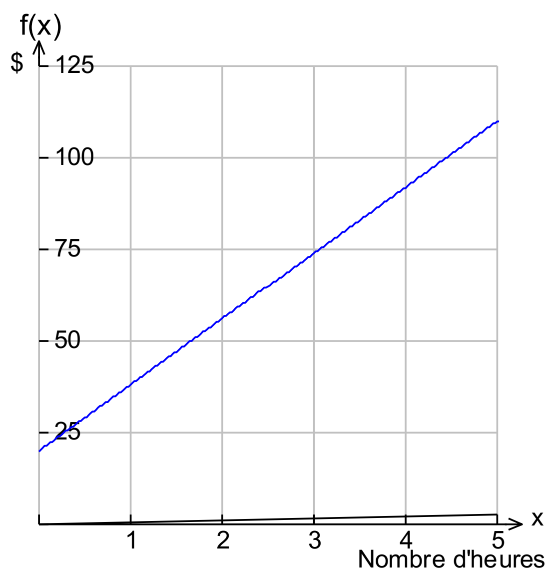


c) $f(25)=1{,}8(25)=77$; 77°F pour 25°C
$f(50)=1{,}8(50)=122$; 122°F pour 50°C
$f(75)=1{,}8(75)=167$; 167°F pour 75°C

13.

a) $f(x)=18x+20$

b)



c) 20.

14.

a) Le taux de variation ou la pente : $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12-9}{5-4} = \frac{3}{1} = 3$.

b) Pour trouver l'ordonnée à l'origine qui n'est pas donnée ici, on peut utiliser la forme générale de l'équation des fonctions linéaires $f(x) = ax + b$. Le coefficient a est déjà connu, c'est 3. Les variables x et y représentent n'importe quel point de la droite, notamment le point (5, 12). On peut donc remplacer x et $f(x)$ par 5 et 12 : $12 = 3(5) + b$ et donc $b = 12 - 15 = -3$.

c) $f(x) = 3x - 3$

d) $0 = 3x - 3$, donc $x = 1$

15.

a) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{58-46}{2-5} = \frac{12}{-3} = -4$

Il faut ensuite trouver l'ordonnée à l'origine. Comme le taux de variation a est –4 et que le couple (58, 2) appartient à la fonction, on a $58 = -4(2) + b$ et donc $b = 58 + 8 = 66$. L'équation est donc : $f(x) = -4x + 66$.

b) Il y avait 66 boîtes.

c) $0 = -4x + 66$ et donc $4x = 66$ et $x = 16{,}5$. C'est au 16[e] jour que l'on manquerait de boîtes de vis.

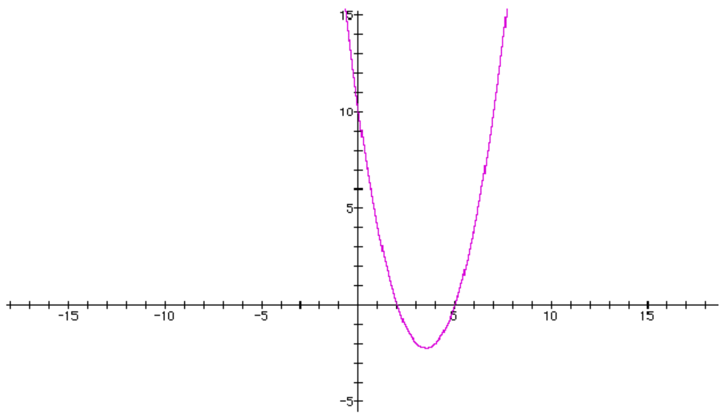
d) $18 = -4x + 66$ et donc $4x = 66 - 18 = 48$ et donc $x = 12$ jours.

16.

a) $f(x)=x^2-7x+10$

Table des valeurs de la fonction $f(x)=x^2-7x+10$

x	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	18	10	4	0	–2	–2	4



Le point sommet : $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)\Rightarrow\left(\dfrac{-(-7)}{2\times1},\dfrac{4(1\times+10)-(-7)^2}{4\times1}\right)$ = $\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{40-49}{4}\right)$ = $\left(\dfrac{7}{2},-\dfrac{9}{4}\right)$

Les zéros : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

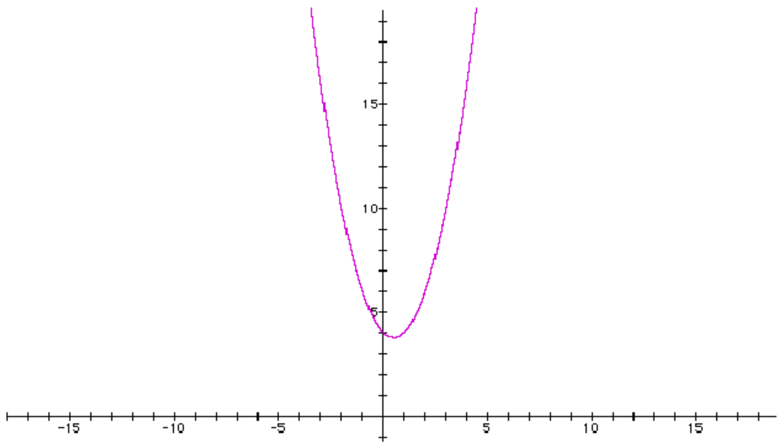
$\Rightarrow x_1=\dfrac{-(-7)+\sqrt{49-4(1\times+10)}}{2\times1}$ et $x_2=\dfrac{-(-7)-\sqrt{49-4(1\times+10)}}{2\times1}$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{7+3}{2}$ et $x_2=\dfrac{7-3}{2}$, d'où : $x1=5$ et $x2=2$

b) $f(x) = x^2 - x + 4$

Table des valeurs de la fonction $f(x) = x^2 - x + 4$

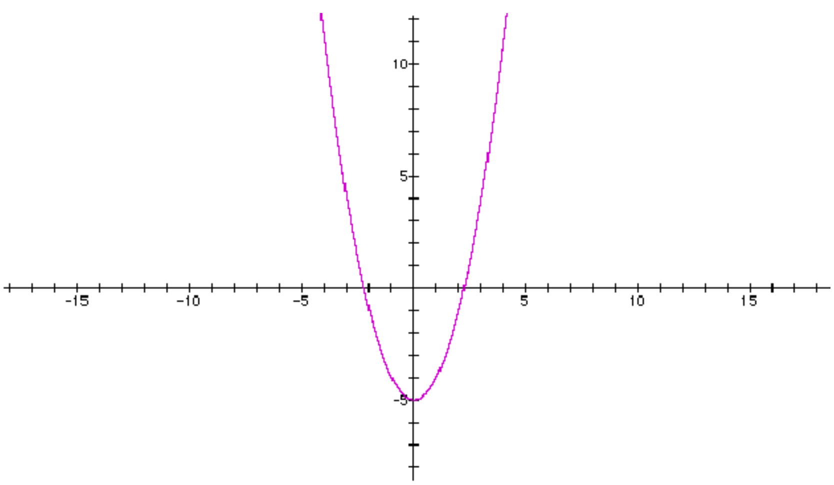
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	16	10	6	4	4	6	10



c) $f(x) = x^2 - 5$

Table des valeurs de la fonction $f(x) = x^2 - 5$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	4	–1	–4	–5	–4	–1	4



Le point sommet : $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) \Rightarrow \left(\frac{-(0)}{2\times 1}, \frac{4(1\times -5)-(0)^2}{4\times 1}\right) = \left(0, -\frac{20}{4}\right) = (0,-5)$

Les zéros : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

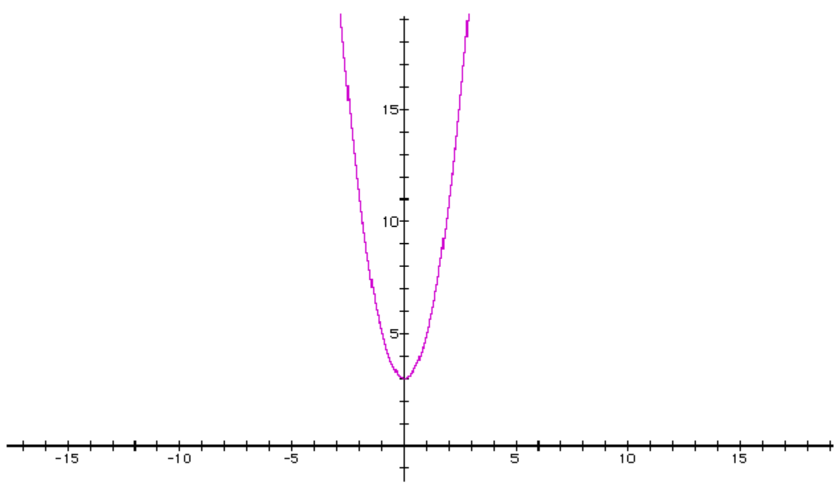
$\Rightarrow x_1 = \frac{-(0)+\sqrt{0-4(1\times -5)}}{2\times 1}$ et $x_2 = \frac{-(0)-\sqrt{0-4(1\times -5)}}{2\times 1}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{4,47}{2}$ et $x_2 = -\frac{4,47}{2}$, d'où : $x_1 = 2,24$ et $x_2 = -2,24$

d) $f(x) = 2x^2 + 3$

Table des valeurs de la fonction $f(x) = 2x^2 + 3$

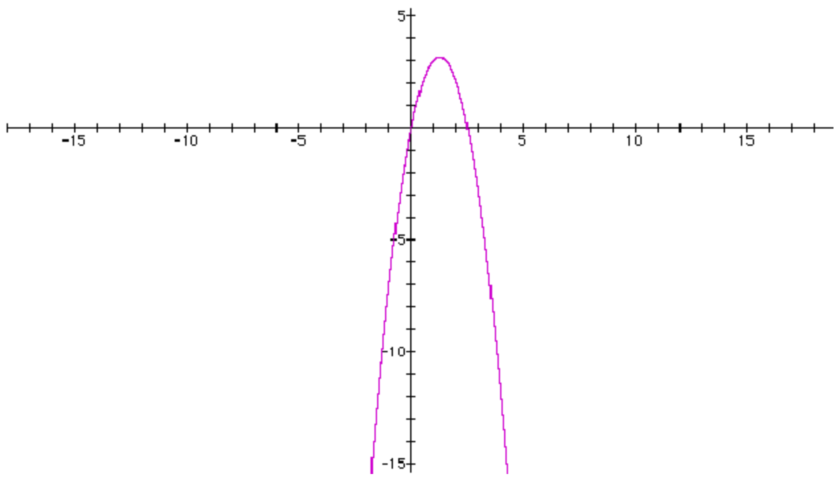
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	21	11	5	3	5	11	21



e) $f(x) = -2x^2 + 5x$

Table des valeurs de la fonction $f(x) = -2x^2 + 5x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	–33	–18	–7	0	3	2	–3



Le point sommet : $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) \Rightarrow \left(\frac{-(5)}{2\times-2}, \frac{4(1\times 0)-(5)^2}{4\times-2}\right) = \left(\frac{-5}{-4}, -\frac{25}{-8}\right) = (1{,}25, 3{,}125)$

Les zéros : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

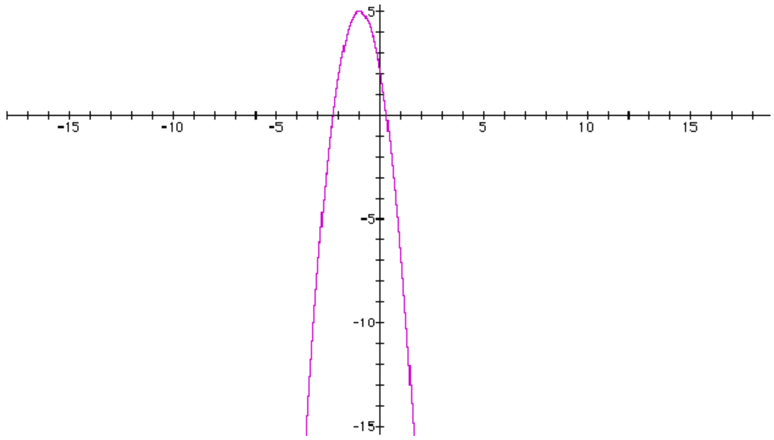
$\Rightarrow x_1 = \frac{-(5)+\sqrt{25-4(-2\times 0)}}{2\times-2}$ et $x_2 = \frac{-(5)-\sqrt{25-4(-2\times 0)}}{2\times-2}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{0}{-4}$ et $x_2 = \frac{-10}{-4}$, d'où : $x_1 = 0$ et $x_2 = 2{,}5$

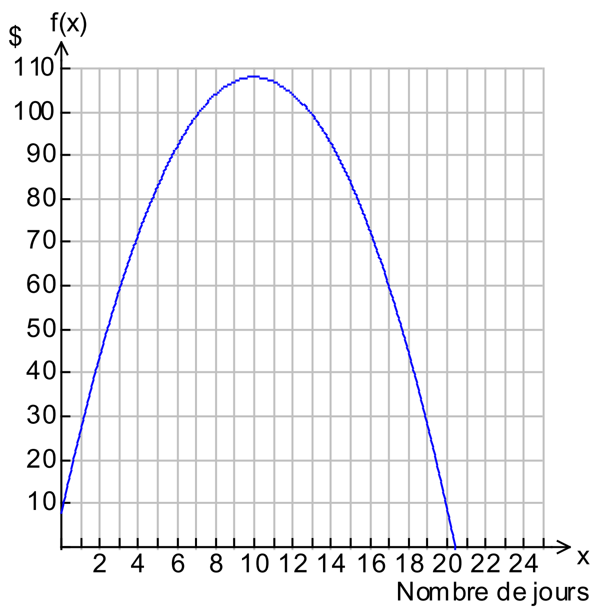
f) $f(x) = -3x^2 - 6x + 2$

Table des valeurs de la fonction $f(x) = -3x^2 - 6x + 2$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	–7	2	5	2	–7	–22	–43



17. Il est toujours préférable de faire un graphique même si ce n'est pas demandé.



a) La fonction est croissante depuis l'achat jusqu'au sommet. Il faut donc trouver le sommet.

$$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-20}{2\times(-1)},\frac{4\times(-1)\times 8-20^2}{4\times(-1)}\right)=\left(\frac{-20}{-2},\frac{-432}{-4}\right)=(10,108)$$

C'est après 10 jours que l'action a atteint son maximum.

b) Le maximum est 108 $.

c) Les valeurs des zéros sont :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-20+\sqrt{20^2-4\times(-1)\times 8}}{2\times(-1)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-20-\sqrt{20^2-4\times(-1)\times 8}}{2\times(-1)}$$

$x_1 = \frac{-20+\sqrt{432}}{-2} = \frac{-20+20{,}8}{-2} = \frac{0{,}8}{-2} = -0{,}4$ à rejeter (avant l'achat).

$$x_2 = \frac{-20-\sqrt{432}}{-2} = \frac{-20-20{,}8}{-2} = \frac{-40{,}8}{-2} = 20{,}4$$

C'est au cours de la 21e journée que l'action n'aura plus de valeur.

d) Au début, l'action valait : $f(0) = -(0)^2 + 20(0) + 8 = 8$.

Il faut donc résoudre l'équation

$$8 = -x^2 + 20x + 8$$

$$0 = -x^2 + 20x$$

$$0 = -x(x-20)$$

Les zéros sont donc 0 et 20 et c'est après 20 jours que l'action a la même valeur qu'au début.

On aurait pu utiliser aussi la formule pour trouver les zéros de la fonction plutôt que de factoriser.

18. Soit x la largeur des toiles :

a) La hauteur est donc $x+10$ et l'aire des toiles $x(x+10)$ ou x^2+10x.

b) $f(x) = 1(x^2+10x)+100 = x^2+10x+100$

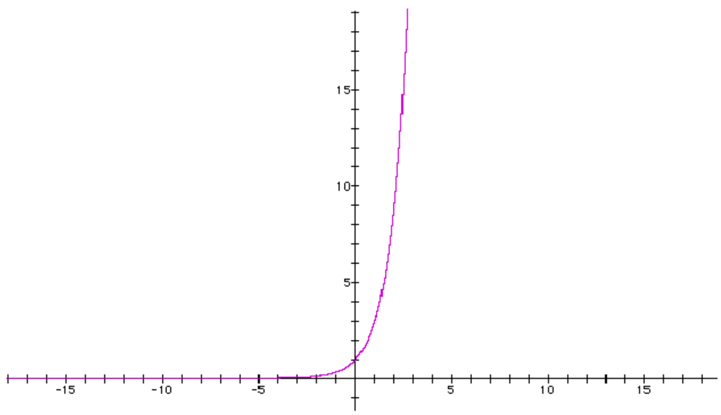
c) $f(10) = 10^2 + 10(10) + 100 = 300$ $

19.

a) $f(x)=3^x$

Table des valeurs de la fonction $f(x)=3^x$

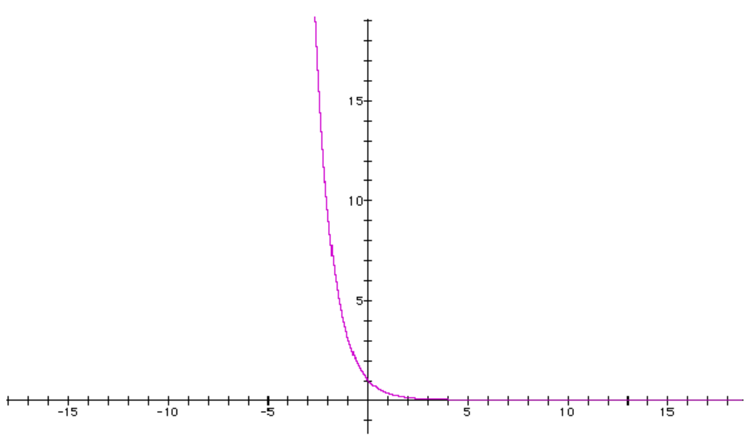
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27



b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Table des valeurs de la fonction $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

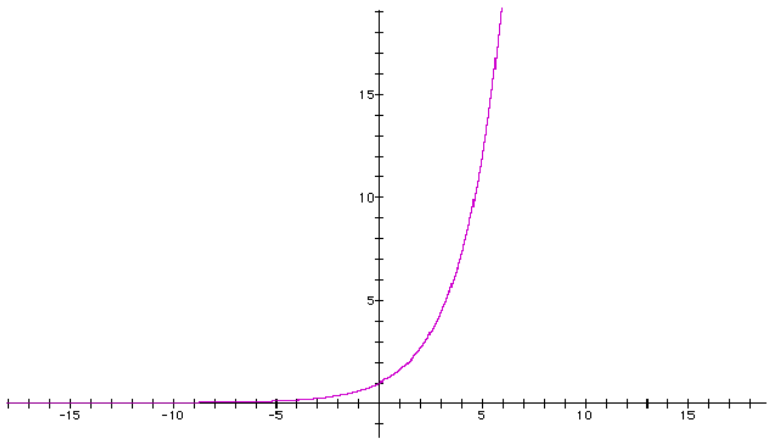
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$



c) $f(x) = e^{x}$

Table des valeurs de la fonction $f(x) = e^{x}$

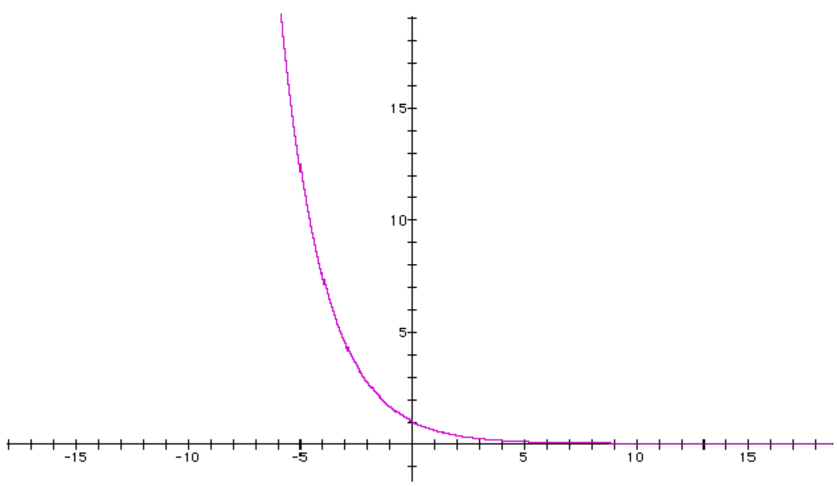
x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
$f(x)$	0,050	0,135	0,368	1	2,718	7,389	20,086



d) $f(x) = e^{-x}$

Table des valeurs de la fonction $f(x) = e^{-x}$

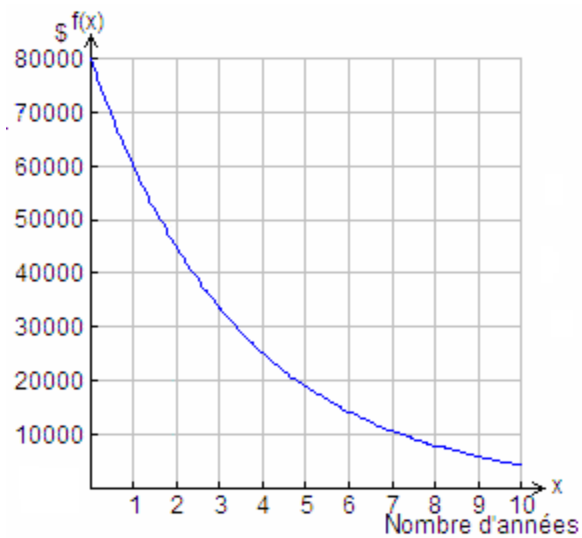
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	20,086	7,389	2,718	1	0,368	0,135	0,050



20.

a) Comme on doit multiplier la valeur du camion par 0,75 pour obtenir sa valeur l'année suivante, c'est une fonction exponentielle de base 0,75 et $f(x) = 80000(0,75)^x$.

b)



c) $f(10) = 80000(0,75)^{10} = 4505,08$ $

d) $20000 = 80000(0,75)^x$. En divisant les deux membres par 80 000, on obtient $0,25 = (0,75)^x$.

Mais x est l'exposant que l'on doit donner à 0,75 pour obtenir 0,25 c'est-à-dire $\log_{0,75} 0,25$.

$$\log_{0,75} 0,25 = \frac{\log 0,25}{\log 0,75} = \frac{-0,60206}{-0,12494} = 4,8188$$

C'est donc durant la cinquième année que la valeur sera de 20 000 $.

21. Comme le montant accumulé chaque année correspond à 103 % de ce qu'il était l'année précédente, le montant de 5 000 $ doit être multiplié par 1,03 autant de fois qu'il y a d'années écoulées.

    a) $f(x)=5000(1{,}03)^x$, où $f(x)$ est le montant accumulé après x années.

    b) $f(5)=5000(1{,}03)^5=5000(1{,}27628)=5\ 796{,}37$ $.

    c) $9000=5000(1{,}03)^x$. En divisant les deux membres par 5 000, on obtient $1{,}8=1{,}03^x$. Comme x est l'exposant que l'on doit donner à 1,03 pour obtenir le nombre 1,8, x est le $\log_{1{,}03} 1{,}8$.

    $$\log_{1{,}03} 1{,}8=\frac{\log 1{,}8}{\log 1{,}03}=\frac{0{,}25527}{0{,}01284}=19{,}8808$$

    C'est donc durant la vingtième année que le montant accumulé sera de 5 000 $.

22. Comme la quantité sous le radical doit être positive (ou 0) mais que le dénominateur ne peut jamais être 0, dom $f =]4, \infty[$.

Section 3

23.

a) $f'(x)=5x^4$ (règle 2)

b) $g'(x)=4\left(x^{40}\right)'=4(40x^{40-1})=160x^{39}$ (règle 2)

c) $h'(x) = (x^{½})' + 5(x^7)' = ½x^{½-1} + 5(7x^6) = ½x^{-½} + 35x^6 =$

$h'(x)=\left(x^{½}\right)'+5\left(x^7\right)'=½x^{½-1}+5\left(7x^6\right)=½x^{-½}+35x^6=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)+35x^6=\frac{1}{2\sqrt{x}}+35x^6$ (règles 4, 3 et 2, puis applications des règles sur les exposants)

d) $j'(x)=(½)(x^{-4})'=(½)(-4)x^{-4-1}=-2x^{-5}$ (règles 3 et 2)

e) $k'(x)=e^X$ (règle 6a)

f) $l'(x)=e^{3x}(3x)'=3e^{3x}$ (règles 6b et 2)

g) $m'(x)=e^{x^3}\left(x^3\right)'=e^{x^3}\left(3x^2\right)=3x^2e^{x^3}$ (règles 6b et 2)

h) $n'(x)=5^{3x+2}(In5)(3x+2)'=(3In5)5^{3x+2}$ (règles 6d et 2)

24.

a) $f'(x)=2(3x^2)-8x-7=6x^2-8x-7$ (règles 2, 3 et 4)

b) $g'(x)=\left(x^{½}\right)'+\left(½x^{-1}\right)'=(½)x^{½-1}+(½)(-1)x^{-1-1}=(½)x^{-½}+(-½)x^{-2}=\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2x^2}$

(règles 3, 4, 2 et règles des exposants)

c) $h'(x)=\left(\sqrt[3]{x^5}\right)'+\left(e^x\right)'=\left(x^{\frac{5}{3}}\right)'+e^x=\dfrac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}+e^x=\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}+e^x=\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}+e^x$

(règles des exposants fractionnaires et règles 2, 4 et 6a)

d) $j'(x)=4xe^{3x}=\left(4xe^x\right)'$

Posons $f(x)=4x$ et donc $f'(x)=4$ et

$g(x)=e^{3x}$ et donc $g'(x)=3e^{3x}$

$j'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)\,j'(x)$

$=4\left(e^{3x}\right)+4x.\,3\left(e^{3x}\right)=4e^{3x}(1+3x)$

e) $k'(x)=\left(2\mathrm{x}5^{-\mathrm{x}}\right)'$ règle de l'exposant négatif.

Posons $f(x)=2x$ et donc $f'(x)=2$ (règle 2) et

$g(x)=5^{-x}$ et donc $g'(x)=(In5)5^{-x}(-1)=(-In5)5^{-x}$ (règle 6d)

$k'(x)=f(x).g'(x)+f'(x)g(x)$ (règle 7)

$k'(x)=(2x)\left((-In\,5)5^{-x}\right)+(2)\left(5^{-x}\right)=5^{-x}\left((2x)\left((-ln\,5)+2\right)=(2)\left(\ 5^{-x}\right)\left(-x\ ln\,5+1\right)\right)$

f) $l'(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

(règles des exposants négatifs et fractionnaires, puis règle 2)

g) $m'(x)=e^{x^3-2x^2+5x-7}(x^3-2x^2+5x-7)'=e^{x^3-2x^2+5x-7}(3x^2-4x+5)$

(règle 6b, puis règles 2, 3 et 4)

h) $n'(x)=\left(\dfrac{2x-6}{x+5}\right)'=\left((2x-6)(x+5)^{-1}\right)'$

Posons $f(x)=2x-6$ et donc $f'(x)=2$ (règle 2) et

$g(x)=(x+5)^{-1}$ et donc $g'(x)=(-1)(x+5)^{-1-1}=(-1)(x+5)^{-2}$

$j'(x)=f(x).g'(x)+f'(x)g(x)$ (règle 7)

$j'(x)=(2x-6)(-1)(x+5)^{-2}+2(x+5)^{-1}=$

$j'(x)=2(x-3)(-1)(x+5)^{-2}+2(x+5)^{-1}=$

$j'(x)=2(x+5)^{-1}[(-x+3)(x+5)^{-1}+1]$

25. Le taux demandé est la valeur de la dérivée lorsque $x=3$.

a) $f'(3)=(-2)(3)x^2+5(2)x-6=(-6)(3)^2+10(3)-6=-54+30-6=-30$

26.

a) C'est la dérivée de la fonction au point où $x=4$.

$g'(x)=2(2x+4)^{2-1}(2)+1=4(2x+4)^1+1=8x+16+1=8x+17$

$g'(4)=8(4)+17=32+17=49$

b) Il faut d'abord trouver la pente de la tangente. C'est $g'(x)$ en $x=1$.

$g'(1)=8(1)+17=8+17=25$

Ensuite, trouvons la pente de la droite perpendiculaire : il faut que le produit des deux pentes soit égal à -1. Ainsi, la pente de la normale à cette courbe, au point où $x=1$, est $-\frac{1}{25}$.

c) Il peut y avoir un minimum si la dérivée s'annule. Résolvons :

$g'(x)=0$

$8x+17=0$

$x=-\frac{17}{8}=-\ 2{,}125$ et le minimum est $g(-2{,}125)=-11{,}0625$

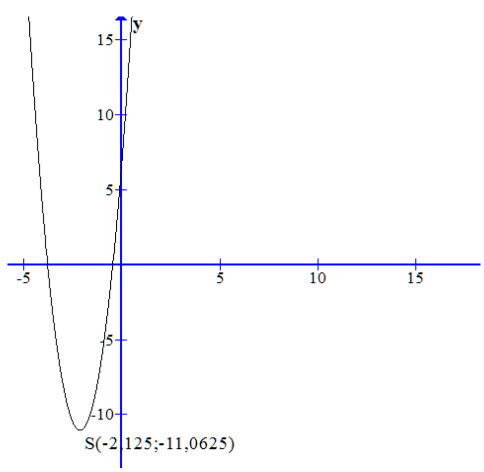
$g(-2)=(2(-2)+4)^2+(-2-9)=0^2-11=-11$

$g(-2{,}125)=(2(-2{,}125)+4)^2+(-2{,}125-9)=(0{,}5)^2-11{,}125=-11{,}0625$

$g(-3)=(2(-3)+4)^2+(-3-9)=(-2)^2-12=4-12=-8$

C'est bien un minimum, car les deux autres points qui l'entourent à –2 et –3 sont placés plus haut que lui sur le graphique.

d)



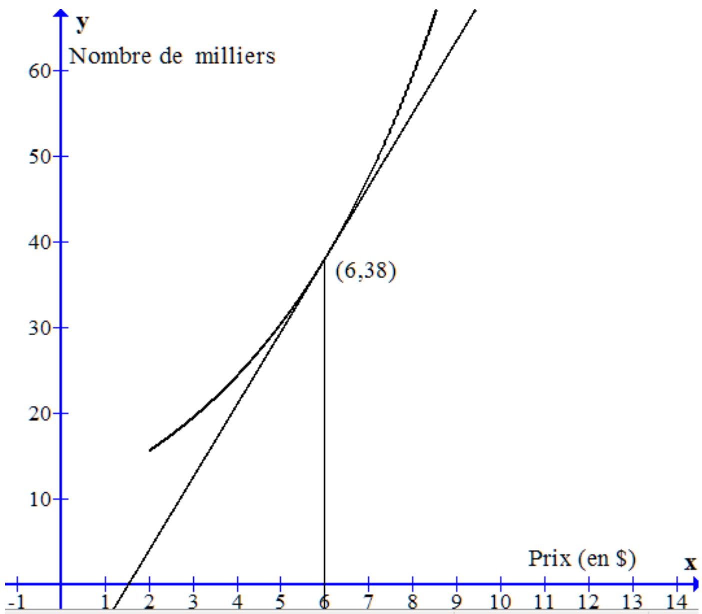
27. Le taux marginal est la valeur de la dérivée lorsque $x=6$.

$$f'(x)=10\left[\left(\frac{5}{4}\right)^x\right]'=10\ln 1{,}25\left(\frac{5}{4}\right)^x$$

$$f'(6)=10(0{,}22314)\left(\frac{5}{4}\right)^6=2{,}2314(3{,}8147)=8{,}51212$$

Donc, l'offre pourrait être augmentée de 8 512 unités si l'on augmente le prix lorsqu'il est de 6 $.

Illustration de la situation :



28. Déterminons le point de tangence : $h(2)=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5$. Le point de tangence est donc le point (2, 2,5).

La pente de la tangente au point de tangence est la dérivée en ce point ($x=2$)

$$f'(x)=\left(\frac{x+3}{x}\right)'=\left((x+3)(x^{-1})\right)'$$

Posons $f(x)=x+3$ et donc $f'(x)=1$

Et $g(x)=x^{-1}$ et donc $g'(x)=-1(x^{-1-1})=\frac{-1}{x^2}$

$H'(x)=f(x).g'(x)+f'(x)g(x)$ (règle 7)

$$\frac{-x-3}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-x-3}{x^2}+\frac{x}{x^2}=\frac{-3}{x^2}$$

$$h'(2)=\frac{-3}{2^2}=-\frac{3}{4}$$

La pente de la tangente est donc $-\frac{3}{4}$ et la pente de la normale doit être 4/3 puisque ces droites sont perpendiculaires.

L'équation de la normale doit tenir compte du fait que sa pente est 4/3 et qu'elle passe par le point (2, 2,5).

$y = ax + b$

$2{,}5 = 4/3.(2) + b$

$2{,}5 = 2{,}67 + b$

$b = 2{,}5 - 2{,}67 = -0{,}17$

L'équation de la normale est donc $y = 4/3x - 0{,}17$.

Cette droite ne passe pas par l'origine. Pour cela, il faudrait que 0 = 4/3(0) – 0,17, ce qui n'est pas le cas.

29. Puisque les points donnés sont sur la courbe, leurs coordonnées vérifient l'équation de la fonction. On aura donc :

$4 = b + k$ ou encore $k = 4 - b$

$16 = b^2 + k$ ou encore $k = 16 - b^2$

Comme on a deux expressions égales à *k*, ces deux expressions sont égales entre elles :

$4 - b = 16 - b^2$

$b^2 - b = 16 - 4$

$b^2 - b - 12 = 0$; c'est une équation quadratique avec b comme inconnue.

Par factorisation :

$(b-4)(b+3) = 0$ car $-4 \times 3 = -12$ et $-4 + 3 = -1$

$b = 4$ ou

$b = -3$ (à rejeter, car la base d'une fonction exponentielle doit être positive)

Si l'on remplace b par 4 dans la première équation, l'on obtient :

$4 = 4 + k$ et donc $k = 0$

L'équation de la fonction est donc $f(x) = 4^x$

30. L'équation canonique de la parabole est : $y = a(x-h)^2 + k$ où (h , k) sont les coordonnées du sommet. La fonction recherchée aura donc la forme :

$f(x) = a(x-2)^2 + 4$. Comme 4 est un zéro, le point (4, 0) appartient à la courbe et donc vérifie son équation :

$0 = a(4-2)^2 + 4$

$0 = 4a + 4$

$-4 = 4a$

$a = -1$ et l'équation de la courbe est :

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$

L'ordonnée à l'origine est la valeur de *y* quand $x = 0$:

$f(0) = -(x-2)^2 + 4 = -4 + 4 = 0$

L'ordonnée à l'origine de la fonction est donc 0.